29

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА
И
ТЕЛЕМЕХАНИКА

Том XXVII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

И. Ковачич

2

МОСКВА · 1966

УДК 621.391.172

ОБОБЩЕННЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ ЗАДЕ — РАГАЗЗИНИ

П. КОВАНИЦ

(Прага)

Приводится матричное решение обобщенного дискретного аналога задачи Заде — Рагаззини и указывается его взаимосвязь с задачей статистической оценки линейных форм и с обработкой косвенных наблюдений. Рассмотрены экстремальные свойства решения и два возможных подхода к вычислениям требуемого результата. Матричная форма решения позволяет не повторять большую часть вычислений при родственных друг другу задачах.

Введение

В работе Л. А. Заде и Дж. Рагаззини [1] сформулирована и решена задача о построении оптимального непрерывного линейного фильтра с постоянными параметрами и конечной памятью для сигнала, состоящего из неслучайного полинома и из стационарной случайной составляющей, поступающего на вход фильтра вместе со стационарной случайной помехой. Эта работа обобщила задачу Н. Винера [2], в которой не учитывалась неслучайная составляющая сигнала. Развитие цифровой техники и ее применений привело к необходимости решать и для дискретных фильтров задачу, эквивалентную задаче Заде — Рагаззини, и развивать таким образом статистическую динамику в направлении, фундаментом которого является работа А. Н. Колмогорова [3]. А. Б. Лис [4] и М. Блум [5] решили задачу интерполирования и экстраполирования значений неслучайной функции и случайной стационарной составляющей при помощи импульсной системы. В работе К. Р. Джонсона [6] приведены приближенные формулы для дисперсии значения производной от полинома, полученной для момента, совпадающего с концом промежутка наблюдения. В другой работе М. Блума [7] использован метод ортогональных полиномов для расчета дискретного фильтра, предназначенного для оптимального интерполирования или экстраполирования значений полинома или его производных в присутствии помехи, являющейся стационарным белым шумом. Дискретный аналог задачи Заде и Рагаззини для импульсных систем рассматривался в работах В. П. Перова [8], Я. З. Цыпкина [9] и В. В. Солодовникова [10]. Решение этой задачи, учитывающей, кроме полинома, и случайную составляющую полезного сигнала можно получить применением теории сопряженных импульсных систем [11] или применением z-преобразований [10, 12].

В указанных работах предполагается, что входной сигнал поступает на вход преобразующей системы в правильных промежутках независимой переменной (времени) и в большинстве случаев также и то, что неслучайная составляющая входного сигнала — полином от независимой переменной. Оба эти предположения являются иногда слишком ограничивающими.

Математическая статистика решает задачи, родственные указанным выше. Речь идет об оценке линейных форм, об обработке косвенных наблюдений, о нелинейной регрессии, сглаживании наблюдений при помощи заданных функций [13, 14]. Специфические особенности дискретной задачи Заде — Рагаззини не позволяют, однако, непосредственно применить результаты теории наблюдений. Но целесообразной может являться попытка рассмотреть обобщенную дискретную задачу Заде — Рагаззини, исходя из выгодного матричного метода, применяемого в теории обработки наблюдений. К этой цели направлена настоящая работа. Общность задачи понимается при этом в следующем смысле:

а) не предполагаются постоянными промежутки между значениями независимой переменной, для которых даны входные значения, «наблюдения»;

б) неслучайная составляющая входных величин может быть линейной комбинацией любых линейно независимых вещественных функций;

в) операция, выполняемая над входным сигналом, может быть любым линейным преобразованием, допускаемым предполагаемыми входными функциями;

г) статистические свойства случайной части входного сигнала и помехи характеризуются математическими ожиданиями и корреляционными функциями без предположений о некоррелированности и «белом» характере.

Известно [15, 11], что задачу Заде — Рагаззини можно считать частным случаем задачи В. М. Семенова, в которой коэффициенты полинома случайны. В настоящей работе эта сторона вопроса не рассматривается и коэффициенты, образующие линейную комбинацию неслучайных входных функций, принимаются неслучайными.

Выбор метода решения направлен к получению явно выраженных матриц, а не к алгоритмам для их расчета, которые можно получить по методу, указанному в работе [16] и развиваемому в других работах, например в [17]. Такие динамические методы позволяют решать более широкий круг задач, но их применение является более сложным в вычислительном отношении.

Формулировка задачи

Входными величинами задачи являются вещественные числа y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, значение входной функции $y(t)$ в точках $t = t_j$. Распределение точек t_j вдоль оси t может быть любым, предполагается только то, что ни одна пара этих точек не совпадает. Физический смысл переменных t и y не играет роли. Пусть

$$y(t) = \sum_{i=1}^{i=m} a_i x_i(t) + \mathring{x}(t) + \dot{x}(t), \tag{1}$$

где $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — неслучайные вещественные линейно независимые функции, числа a_i — любые неизвестные вещественные числа. функция $\mathring{x}(t)$ — полезная стационарная случайная составляющая, $\dot{x}(t)$ — стационарная случайная помеха. Обе случайные функции вещественны, их корреляцинные функции известны. Без ограничения общности предполагается, что

$$\overline{\mathring{x}(t)} = \overline{\dot{x}(t)} = 0 \tag{2}$$

для всех t (черточка обозначает операцию математического ожидания, которая здесь и дальше производится по множеству реализаций). В случае отличия среднего значения случайных величин от нуля можно средние значения включить в неслучайную составляющую.

Подставим значения t_j в уравнение (1) и полученную систему уравнений запишем в матричной форме

$$\mathbf{Y}_{1,n} = \mathbf{A}_{1,m}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}_{m,n} + \dot{\mathbf{X}}_{1,n} + \mathring{\mathbf{X}}_{1,n}. \tag{3}$$

Первый индекс означает число строк, второй — число столбцов. Размеры матриц будут указываться только в необходимых случаях. Буква $^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонированную матрицу.

Представим более подробно матрицу X:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{n,m} = \begin{Vmatrix} x_1(t_1) \dots x_m(t_1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1(t_n) \dots x_m(t_n) \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Во всей работе предполагается

$$m \leqslant n. \tag{5}$$

Искомой (выходной) величиной задачи является число z — наилучшая несмещенная оценка значения функции, полученной заданным линейным преобразованием L полезной составляющей входной функции в точке t_r. Линейность оператора L характеризуется, как обычно,

$$L\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\} = c_1L\{f_1(t)\} + c_2L\{f_2(t)\}. \tag{6}$$

Оператор L может характеризовать, например, производные разной степени, определенные интегралы, интегралы типа свертки и т. п., а также линейные комбинации этих операций. В зависимости от выбора точки t_r (характеризуемого записью $L\{x_i(t)\}_{t_r}$, дело касается интерполирования, экстраполирования или простого сглаживания указанных функционалов.

Выбор оператора L и функций $x_i(t)$ и $\overset{\circ}{x}(t)$ взаимосвязан, следует ограничиться теми операциями, которые для данных функций имеют смысл.

Искомую величину z представим в виде

$$z = \mathbf{YW}, \tag{7}$$

где матрица $\mathbf{W}_{n,1}$ подлежит определению, после чего формула (7) должна служить рабочей формулой для подсчета z при любом векторе $\mathbf{Y}$ типа (3) при сохранении оптимальности.

Подставляя (3) в (7) и усредняя полученное уравнение по множеству реализаций, имеем

$$\bar{z} = \mathbf{AX}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}, \tag{8}$$

причем для средних значений следует из (1)

$$\overline{y(t)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i x_i(t). \tag{9}$$

После выполнения преобразования L с использованием свойства (6) получаем равенство

$$\overline{z(t_r)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i L\{x_i(t)\}_{t_r} \tag{10}$$

Вводя матрицу $\mathbf{L}_{m,1}$:

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} L\{x_1(t)\}_{t_r} \\ \vdots \\ L\{x_m(t)\}_{t_r} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

и сравнивая (10) с (8), получаем условие

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{W} = \mathbf{L}, \tag{12}$$

обеспечивающее эквивалентность уравнений (8) и (10) для любого вектора $\mathbf{A}$. Условие (12) накладывает m условий на выбор составляющих вектора $\mathbf{W}$ и обеспечивает точное преобразование средних значений входной функции, т. е. несмещенность оценки z.

Ошибка искомой величины z дана разностью между действительным результатом преобразования z_s и его требуемым значением z_p, т. е.

$$z_s - z_p = \mathbf{AX}^{\mathrm{T}}\mathbf{W} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{W} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{W} - \mathbf{AL} - L\{\dot{x}(t)\}_{t_r}. \tag{13}$$

Используя (12), запишем средний квадрат ошибки, т. е. дисперсию величины z, в виде

$$D_z = \overline{(z_s - z_p)^2},$$

$$D_z = \mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{W} - 2\mathbf{C}\mathbf{W} + d, \tag{14}$$

где корреляционную матрицу, обозначенную для удобства $\mathbf{B}^{-1}$,

$$\mathbf{B}_{n,\,n}{}^{-1} = \overline{\overset{\circ}{\mathbf{X}}{}^{\mathsf{T}}\overset{\circ}{\mathbf{X}}} + \overline{\overset{*}{\mathbf{X}}{}^{\mathsf{T}}\overset{*}{\mathbf{X}}} + 2\overline{\overset{\circ}{\mathbf{X}}{}^{\mathsf{T}}\overset{*}{\mathbf{X}}}, \tag{15}$$

так же как и матрицу

$$(\mathbf{C}_{1,\,n})^{\mathsf{T}} = \left\| \begin{matrix} \overline{L\{\overset{\circ}{x}(t)\}_{t_r}(\overset{\circ}{x}(t_1) + \overset{*}{x}(t_1))} \\ \vdots \\ \overline{L\{\overset{\circ}{x}(t)\}_{t_r}(\overset{\circ}{x}(t_n) + \overset{*}{x}(t_n))} \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

и величину

$$d_{1,\,1} = \overline{[L\{\overset{\circ}{x}(t)\}_{t_r}]^2}, \tag{17}$$

можно подсчитать по заданным корреляционным функциям, учитывая конкретный вид заданного оператора L. Предполагается, что матрица $\mathbf{B}^{-1}$ — неособенная симметричная матрица.

Наилучшим будет считаться тот выбор вектора $\mathbf{W}$, который, удовлетворяя условию несмещенности (12), приводит к минимуму дисперсии искомой величины z, т. е. к минимуму величины D_z (14).

Решение задачи

Применим метод Лагранжа для нахождения условного минимума. Вводим вектор лагранжевых коэффициентов $\mathbf{K}_{1,\,m}$ и находим минимум выражения

$$D_1 = \mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{W} - 2\mathbf{C}\mathbf{W} - 2\mathbf{K}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{W} - \mathbf{L}), \tag{18}$$

придавая вектору $\mathbf{W}$ вариацию $\delta\mathbf{W}$ и приравнивая полученную вариацию величины D_1 нулю. Так как полученное уравнение должно удовлетворяться независимо от выбора вариаций, то должно удовлетворяться уравнение

$$\mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{C} - \mathbf{K}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}_{1,\,n}, \tag{19}$$

где $\mathbf{0}_{1,\,n}$ — матрица (вектор) с нулевыми элементами. Умножение уравнения (19) справа на матрицу $\mathbf{B}$ дает

$$\mathbf{W}^{\mathsf{T}} = \mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{K}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}, \tag{20}$$

откуда после умножения на $\mathbf{X}$ и после подстановки $\mathbf{L}$ из (12)

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}^{\mathsf{T}} + \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{K}, \tag{21}$$

$\mathbf{B}$ — симметричная матрица, поэтому можно ее транспозицию не указывать.

Матрица $\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}$ — неособенная матрица. Действительно, вследствие симметрии матрицы $\mathbf{B}$ можно эту матрицу представить как произведение некоторой неособенной матрицы $\mathbf{S}$ (треугольного типа) и ее транспонированной матрицы, т. е. в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathsf{T}}. \tag{22}$$

Поэтому

$$\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}. \tag{23}$$

По предположению, m функций $x_i(t)$ образуют линейно независимые столбцы матрицы $\mathbf{X}$. Ранг матрицы $\mathbf{X}$ равен, следовательно, m, причем согласно (5) $n \geqslant m$. Ранг матрицы $\mathbf{S}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ также равен m. Уравнение (23) показывает, что определитель матрицы $\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X}$ — определитель Грама, т. е.

$$\mathrm{Det}\,(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X}) = \sum_k \delta_k^2, \tag{24}$$

где δ_k пробегает все миноры m-го порядка, содержащиеся в матрице $\mathbf{S}^\mathsf{T}\mathbf{X}$. Из них по крайней мере один отличается от нуля, в противном случае ранг матрицы $\mathbf{S}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ был бы меньшим, чем m. Поэтому

$$\mathrm{Det}\,(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X}) > 0, \tag{25}$$

что и требовалось.

Это позволяет определить $\mathbf{K}$ из (21) в виде

$$\mathbf{K} = (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} - (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}^\mathsf{T}, \tag{26}$$

что после подстановки в транспонированное уравнение (20) дает искомый вектор

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{X}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L} + [\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{X}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}]\mathbf{B}\mathbf{C}^\mathsf{T}, \tag{27}$$

где $\mathbf{E}_{n,\,n}$ — единичная матрица.

Известно, что метод Лагранжа дает только необходимые, но не достаточные условия минимума. Ниже покажем, что вектор $\mathbf{W}$, найденный согласно (27), действительно дает минимум дисперсии (14) и, следовательно, является решением задачи.

Геометрические соображения

Для удобства дальнейших выкладок выполним некоторые преобразования введенных выше матриц.

Исходя из (23) и применяя матрицы $\mathbf{V}_{m,\,m}$ (треугольного типа), можно записать

$$(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{S}\mathbf{S}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{V}^\mathsf{T}, \tag{28}$$

что с использованием матрицы

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^\mathsf{T}\mathbf{X}\mathbf{V} \tag{29}$$

дает возможность переписать (27) в виде

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{F}\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{L} + [\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{F}^\mathsf{T}]\mathbf{S}^\mathsf{T}\mathbf{C}^\mathsf{T}. \tag{30}$$

Можно убедиться непосредственной подстановкой, что условие несмещенности (12) в новых обозначениях принимает вид

$$\mathbf{F}^\mathsf{T}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W} = \mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{L} \tag{31}$$

и что оно удовлетворяется выражением (30), так как

$$\mathbf{F}^\mathsf{T}\mathbf{F} = \mathbf{E}_{m,\,m}. \tag{32}$$

Указанным матрицам можно придать простой геометрический смысл. Построим n-мерное пространство N при помощи n линейно независимых векторов $\mathbf{YS}$. Нормой этого пространства является обычное скалярное произведение векторов. Определим подпространство N_m пространства N, натянутое на m линейно независимых векторов — строк матрицы $\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{S}$. Каждый вектор из N_m может быть, следовательно, представлен в виде $\mathbf{M}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{S}$, где $\mathbf{M}_{1,\,m}$ — подходящий вектор, т. е. m строк матрицы $\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{S}$ образует базис подпространства N_m. Но из (29) следует, что любой вектор-столбец матрицы $\mathbf{F}$ — вектор из N_m. Ранг матрицы $\mathbf{F}$ равен m, поэтому столбцы матрицы $\mathbf{F}$ могут также служить в качестве базиса подпространства N_m. Более того, уравнение (32) показывает, что это ортонормированный базис.

Матрица $\mathbf{F}\mathbf{F}^\mathsf{T}$ — симметрическая и идемпотентная матрица, так как

$$(\mathbf{F}\mathbf{F}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\mathsf{T} \tag{33}$$

и вследствие (32)

$$(\mathbf{F}\mathbf{F}^\mathsf{T})^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^\mathsf{T}. \tag{34}$$

Но всякое симметричное и идемпотентное преобразование $\mathcal{P}$ есть проектирование на область значений $\mathcal{P}$ [18]. Матрица $\mathbf{FF^T}$ проектирует любой вектор $\mathbf{YS}$ из пространства N в подпространство N_m. Непосредственным следствием (32) является и уравнение

$$\mathbf{F^T}(\mathbf{FF^T}) = \mathbf{F^T}, \tag{35}$$

показывающее известное свойство матриц проектирования — матрица оставляет без изменения любой вектор из подпространства N_m, в которое сама проектирует. Кроме того, смысл (35) может быть истолкован как показание того, что строки матрицы $\mathbf{F^T}$ являются собственными векторами матрицы $\mathbf{FF^T}$ и что каждое из m соответствующих собственных чисел этой матрицы равно единице. Так как ранг матрицы $\mathbf{FF^T}$ равен m, то остальные собственные числа равны нулю.

Нетрудно построить подпространство N_{n-m}, ортогональное к подпространству N_m. Ортонормированную базу этого подпространства пусть образуют векторы-строки матрицы $\mathbf{F}_\perp{}^\mathrm{T}$.

Тогда

$$\mathbf{F}_\perp{}^\mathrm{T}\mathbf{F} = \mathbf{0}_{n-m,\,m}, \tag{36}$$

причем

$$\mathbf{F}_\perp{}^\mathrm{T}\mathbf{F}_\perp = \mathbf{E}_{n-m,\,n-m}. \tag{37}$$

Применяя указанные соотношения, заключаем, что матрица

$$\mathbf{E} - \mathbf{FF^T} = \mathbf{F}_\perp\mathbf{F}_\perp{}^\mathrm{T} \tag{38}$$

является матрицей проектирования из пространства N в подпространство N_{n-m}. Любой вектор $\mathbf{YS}$ можно, следовательно, представить как

$$\mathbf{YS} = \mathbf{A}_\parallel\mathbf{F^T} + \mathbf{A}_\perp\mathbf{F}_\perp{}^\mathrm{T}, \tag{39}$$

причем векторы $\mathbf{A}_\parallel$ и $\mathbf{A}_\perp$ определяются однозначно:

$$\mathbf{A}_\parallel = \mathbf{YSF} \tag{40}$$

и

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{YSF}_\perp. \tag{41}$$

Уравнение (30) показывает, что вектор-оператор $\mathbf{S^{-1}W}$ состоит в общем случае из двух векторов, первый из которых является вектором из N_m и второй — из N_{n-m}.

Минимальность дисперсии искомой величины z

После подстановки из (30) в выражение для дисперсии (14) получаем

$$D_z = \mathbf{L^TVV^TL} - 2\mathbf{CSFV^TL} - \mathbf{CS}[\mathbf{E} - \mathbf{FF^T}]\mathbf{S^TC^T} + d. \tag{42}$$

Рассмотрим любой вектор $\mathbf{W}_{n,1}$, удовлетворяющий условию несмещенности (31), т. е.

$$\mathbf{F^TS^{-1}W} = \mathbf{V^TL}. \tag{43}$$

Применение этого вектора $\hat{\mathbf{W}}$ к определению величины $\hat{z}$ по формуле вида (7) приводит к дисперсии $D_{\hat{z}}$, равной в соответствии с (14)

$$D_{\hat{z}} = \hat{\mathbf{W}}^\mathrm{T}(\mathbf{S^T})^{-1}\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}} - 2\mathbf{C}\hat{\mathbf{W}} + d. \tag{44}$$

Подставим (43) в (42) и вычтем полученное уравнение из (44), что даст

$$D_{\hat{z}} - D_z = [\hat{\mathbf{W}}^\mathrm{T}(\mathbf{S^T})^{-1} - \mathbf{CS}][\mathbf{E} - \mathbf{FF^T}][\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}} - \mathbf{S^TC^T}]. \tag{45}$$

Симметричную матрицу $\mathbf{E} - \mathbf{FF^T}$ можно представить как

$$[\mathbf{E} - \mathbf{FF^T}] = \mathbf{F_0^TM_DF_0}, \tag{46}$$

где $(\mathbf{M}_D)_{n,n}$ — диагональная матрица и $(\mathbf{F}_0)_{n,n}$ — ортогональная матрица, так что $\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^T = \mathbf{E}_{n,n}$. Используя (46) вместе с (34) и опираясь на ортогональность матрицы $\mathbf{F}_0$, можно убедиться, что

$$\mathbf{M}_D^2 = \mathbf{M}_D, \tag{47}$$

так что элементы m_j, стоящие на диагонали матрицы $\mathbf{M}_D$, равны или нулю, или единице, так как $m_j^2 = m_j$. Это не удивительно, так как матрица $\mathbf{M}_D$ подобна матрице проектирования $\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, у которой $n - m$ собственных чисел равно единице, и остальные — нулю. Обозначая составляющие вектора $\mathbf{F}_0[\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}} - \mathbf{S}^T\mathbf{C}^T]$ через p_i, можно представить разность дисперсий (45) в виде

$$D_{\hat{z}} - D_z = \sum_{j=1}^{j=n} m_j^2 p_j^2, \tag{48}$$

т. е.

$$D_{\hat{z}} - D_z \geqslant 0. \tag{49}$$

Итак, среди всех линейных относительно входных значений оценок вида (7), удовлетворяющих условию несмещенности (43), оценка результата z требуемого линейного преобразования L, полученная при помощи вектора $\mathbf{W}$ согласно (30), обладает минимальной дисперсией D_z, равной (14) и (42).

Кстати сказать, в [14] приведена теорема Ю. Неймана и Ф. Дэвид для оценивания линейных форм при косвенных наблюдениях, содержание которой можно получить как частный случай рассматриваемой нами задачи при $\hat{\mathbf{X}} \equiv 0_{1,n}$ (отсутствует случайная полезная составляющая) и при диагональной матрице $\mathbf{B}$ (некоррелированные составляющие вектора помех, помехи типа белого шума), если придать общим коэффициентам линейной формы соответствующий смысл. Отметим, что для оптимальности решения поставленной задачи, как и в случае оценки линейных форм, не предполагается какой-нибудь специальный вид функции распределения входных случайных функций, например нормальное распределение.

Сглаживание (фильтрация) и его оптимальность

Рассмотрим частный случай оператора L, характеризуемый соотношением

$$L\{x_i(t)\}_{t_r} = x_i(t_r), \tag{50}$$

т. е.

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{L}_r = \begin{Vmatrix} x_1(t_r) \\ \vdots \\ x_m(t_r) \end{Vmatrix}, \tag{51}$$

так что для $t_r = t_i$ вектор $\mathbf{X}_r$ совпадает с i-м столбцом матрицы $\mathbf{X}^T$. Применяя (51) для расчета z согласно (7) получим

$$z_r = \tilde{y}_r = \mathbf{Y}\mathbf{W}_r, \tag{52}$$

где $\tilde{y}_r$ — наилучшая несмещенная оценка значения полезной части входной функции в точке t_r, т. е. сглаженное значение. Подставляя последовательно $t_r = t_j$ для всех j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, запишем полученную последовательность значений $\tilde{y}_r$ в виде вектора $\tilde{\mathbf{Y}}_{1,n}$, причем

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{W}_v, \tag{53}$$

где матрица $(\mathbf{W}_v)_{n,n}$ образована векторами $\mathbf{W}_r$. После подстановки (51) в (30) для всех t_j, можно матрицу $\mathbf{W}_v$ представить в виде

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}_v\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T + [\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{F}^T]\mathbf{R}, \tag{54}$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_v{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} \tag{55}$$

и где матрица $(\mathbf{C}_v{}^{\mathrm{T}})_{n,\, n}$ построена из векторов $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, рассчитанных для всех $t_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ и для оператора L вида (50) (тождественного преобразования), по формуле (16).

Как было показано, дисперсия каждой из величин $\tilde{y}_j$ минимальна (47). Покажем, что математическое ожидание суммы квадратов отклонений величин $\tilde{y}_j$ от входных значений y_j также минимально.

Корреляционную матрицу вектора ошибок сглаживания

$$\mathbf{K} = \overline{(\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Y}^{\mathrm{T}})(\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})} \tag{56}$$

можно преобразовать после подстановки из (3) и (53) с применением уже введенных матриц и с учетом условия несмещенности (43), принимающего для рассматриваемого случая вид

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}_v\mathbf{S} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{57}$$

получая

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}_v{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}_v - \mathbf{W}_v{}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_v{}^{\mathrm{T}} - \mathbf{C}_v\mathbf{W}_v + \mathbf{K}_0, \tag{58}$$

где

$$\mathbf{K}_0 = \overline{\mathring{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathring{\mathbf{X}}}. \tag{59}$$

После подстановки $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}_v\mathbf{S}$ из (54) получаем

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}[\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}]\mathbf{R} + \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_0\mathbf{S}. \tag{60}$$

Применение для сглаживания любой другой матрицы $\hat{\mathbf{W}}_v$, удовлетворяющей условию несмещенности (57), дает вектор $\hat{\mathbf{Y}}$, корреляционная матрица которого вполне аналогична (58), т. е.

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{W}}_v{}^{\mathrm{T}}(\mathbf{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_v - \hat{\mathbf{W}}_v{}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_v{}^{\mathrm{T}} - \mathbf{C}_v\hat{\mathbf{W}}_v + \mathbf{K}_0. \tag{61}$$

Подставляя в (60) условие несмещенности (57), записанное для матрицы $\hat{\mathbf{W}}_v$, и вычитая полученное уравнение из уравнения (61), умноженного на $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{S}$, получаем

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{S} - \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{S} = [\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_v(\mathbf{S}^{\mathrm{T}})^{-1} - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}][\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}][\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_v\mathbf{S} - \mathbf{R}], \tag{62}$$

или, после подстановки из (46),

$$\hat{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}_v{}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_D\mathbf{P}_v, \tag{63}$$

где

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{F}_0[\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_v\mathbf{S} - \mathbf{R}]\mathbf{S}^{-1} \tag{64}$$

есть матрица с элементами p_{rs} и $\mathbf{M}_D$ — известная уже диагональная матрица с элементами $m_j^2 = m_j$, что вытекает из (47).

След матрицы $\mathbf{P}_v{}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_D\mathbf{P}_v$ равен

$$Sp\{\mathbf{P}_v{}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_D\mathbf{P}_v\} = \sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} m_r{}^2 p_{rs}{}^2, \tag{65}$$

т. е. он неотрицателен.

Из (65) и (63) следует

$$Sp\{\hat{\mathbf{K}}\} \geqslant Sp\{\tilde{\mathbf{K}}\}. \tag{66}$$

След корреляционной матрицы случайного вектора равен сумме дисперсий его составляющих. Итак, сумма дисперсий ошибок сглаживания, выполненного матрицей $\mathbf{W}_v$, рассчитанной по формуле (54), минимальна.

Преобразуя какой-нибудь вектор $\mathbf{YS}$, разложенный согласно (39), при помощи матрицы сглаживания (54), получим

$$\widetilde{\mathbf{YS}} = \mathbf{A}_{\parallel}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}. \tag{67}$$

Таким образом, операция сглаживания оставляет вектор, лежащий в подпространстве N_m, неизменным, в то время как составляющую этого вектора, лежащую в подпространстве N_{n-m}, преобразует при помощи матрицы $\mathbf{R}$. Вектор $\widetilde{\mathbf{YS}}$, следовательно, является вектором из N_m только в случае аннулирования второй части правой стороны уравнения (67). Для этого достаточно положить $\mathbf{R} = \mathbf{0}_{n,\,n}$, что соответствует отсутствию случайной составляющей полезного сигнала ($\dot{x}(t) \equiv 0$). В этом частном случае можно понимать задачу как оценку результатов косвенных безусловных измерений [14] при помощи метода наименьших квадратов. Для этой задачи геометрическое представление дано А. Н. Колмогоровым [19]. При обычной задаче сглаживания линейной комбинацией заданных функций по методу наименьших квадратов [13], являющейся формально той же задачей, что и обработка косвенных наблюдений, минимизируется, как известно, сумма квадратов уклонений сглаженных значений от входных значений. Покажем это для ясности. Положим $\mathring{x}(t) \equiv 0$, из чего следует $\mathbf{R} = \mathbf{0}_{n,\,n}$. Записывая (3) в виде

$$\mathbf{YS} = \mathbf{AF}^{T} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{F}^{T} + \dot{\mathbf{A}}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{T}, \tag{68}$$

где векторы $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{F}^{T}$ и $\dot{\mathbf{A}}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{T}$ получены разложением вектора $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{S}$ в два ортогональных вектора, имеем из (67)

$$\widetilde{\mathbf{YS}} = \mathbf{AF}^{T} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{F}^{T} \tag{69}$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{YS} - \widetilde{\mathbf{YS}})(\mathbf{YS} - \widetilde{\mathbf{YS}})^{T} = \dot{\mathbf{A}}_{\perp}\dot{\mathbf{A}}_{\perp}{}^{T}. \tag{70}$$

Умножение (68) на любую другую матрицу $\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_{v}\mathbf{S}$ дает вектор $\hat{\mathbf{YS}}$, причем

$$(\mathbf{YS} - \hat{\mathbf{YS}})(\mathbf{YS} - \hat{\mathbf{YS}})^{T} = \dot{\mathbf{A}}_{\perp}(\mathbf{F}_{\perp}{}^{T} - \mathbf{F}_{\perp}{}^{T}\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_{v}\mathbf{S}) \times$$
$$\times (\mathbf{F}_{\perp} - \mathbf{S}^{T}\mathbf{W}_{v}{}^{T}(\mathbf{S}^{T})^{-1}\mathbf{F}_{\perp})\dot{\mathbf{A}}_{\perp}{}^{T}. \tag{71}$$

Но матрица $\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_{v}\mathbf{S}$ должна удовлетворять условию несмещенности (57), из которого следует в результате действия (36)

$$\mathbf{F}^{T}\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_{v}\mathbf{S}\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{0}_{m,\,n-m}, \tag{72}$$

что приводит к выражению

$$(\mathbf{YS} - \hat{\mathbf{YS}})(\mathbf{YS} - \hat{\mathbf{YS}})^{T} = \dot{\mathbf{A}}_{\perp}\dot{\mathbf{A}}_{\perp}{}^{T} + \dot{\mathbf{A}}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{T}\mathbf{S}^{-1}\hat{\mathbf{W}}_{v}\mathbf{S}\mathbf{S}^{T}\hat{\mathbf{W}}_{v}{}^{T}(\mathbf{S}^{T})^{-1}\mathbf{F}_{\perp}\dot{\mathbf{A}}_{\perp}{}^{T}, \tag{73}$$

т. е. к неравенству

$$(\mathbf{YS} - \hat{\mathbf{YS}})(\mathbf{YS} - \hat{\mathbf{YS}})^{T} - (\mathbf{YS} - \widetilde{\mathbf{YS}})(\mathbf{YS} - \widetilde{\mathbf{YS}})^{T} \geqslant 0, \tag{74}$$

для любой матрицы, дающей несмещенную оценку вектора $\widetilde{\mathbf{YS}}$. Итак, сумма квадратов ошибок сглаживания при применении матрицы $\mathbf{W}_{v}$ согласно (54) при $x^{\circ}(t) \equiv 0$ минимальна.

Возвратимся теперь к общему случаю вектора $\mathbf{YS}$, характеризуемого уравнением (3). Это уравнение можно формально видоизменить с учетом (38)

$$\mathbf{YS} = A\mathbf{F}^{T} + (\mathring{\mathbf{X}}\mathbf{S} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{S})\mathbf{FF}^{T} + (\mathring{\mathbf{X}}\mathbf{S} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{S})\mathbf{F}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{T}. \tag{75}$$

Оценкой вектора $\mathbf{A}_{1,\,m}$ может служить выражение (40), полученное умножением (75) справа на $\mathbf{F}$, т. е.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + (\mathring{\mathbf{X}}\mathbf{S} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{S})\mathbf{F}. \tag{76}$$

Из (1) следует, что $\widetilde{\mathbf{A}}$ — несмещенная оценка.

Любая другая матрица $\hat{\mathbf{F}}_{n,\,m}$ дает оценку

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{YS}\hat{\mathbf{F}}. \tag{77}$$

Подставляя (1) в (77), можно убедиться, что условие несмещенности имеет здесь вид

$$\mathbf{F}^{\tau}\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}_{m,\,m}. \tag{78}$$

Этому условию удовлетворяет матрица

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\perp}\mathbf{M}, \tag{79}$$

где $\mathbf{M}_{n-m,\,m}$ — любая вещественная матрица данного размера.

Подстановка (79) и (75) в (77) дает

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + (\mathring{\mathbf{X}}\mathbf{S} + \overset{*}{\mathbf{X}}\mathbf{S})\mathbf{F} + (\mathring{\mathbf{X}}\mathbf{S} + \overset{*}{\mathbf{X}}\mathbf{S})\mathbf{F}_{\perp}\mathbf{M}. \tag{80}$$

Каждый вектор-столбец матрицы **FM** является вектором из подпространства N_{n-m}, из чего следует

$$\mathbf{F}_{\perp}\mathbf{M}\mathbf{F}^{\tau} = \mathbf{0}_{n,\,n}. \tag{81}$$

Из (80) и (76) с учетом (81) имеем

$$(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau} - (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau} =$$

$$= (\mathring{\mathbf{X}} + \overset{*}{\mathbf{X}})\mathbf{S}\mathbf{F}_{\perp}\mathbf{M}\mathbf{M}^{\tau}\mathbf{F}_{\perp}{}^{\tau}\mathbf{S}^{\tau}(\mathring{\mathbf{X}} + \overset{*}{\mathbf{X}})^{\tau} \tag{82}$$

или

$$(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau} - (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau} \geqslant 0, \tag{83}$$

т. е. сумма квадратов отклонений $\tilde{\mathbf{A}}$ от **A** минимальна.

Учитывая определение матрицы **S** и свойства матриц **F** и $\mathbf{F}_{\perp}$, можно получить из (80), (79) и (76)

$$\overline{(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau}(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})} = E_{m,\,m}, \tag{84}$$

$$\overline{(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau}(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})} = \mathbf{E}_{m,\,m} + \mathbf{M}^{\tau}\mathbf{M}. \tag{85}$$

След матрицы $\mathbf{M}\mathbf{M}^{\tau}$ неотрицателен, поэтому

$$Sp\{\overline{(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau}(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})}\} - Sp\{\overline{(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})^{\tau}(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})}\} \geqslant 0, \tag{86}$$

т. е. сумма дисперсий составляющих вектора $\tilde{\mathbf{A}}$, найденного по формуле (40), минимальна.

В [11] приведена так называемая обобщенная теорема Гаусса — Маркова, справедливая для случая, характеризуемого в наших обозначениях предположением $\mathring{x}(t) \equiv 0$. По этой теореме оптимальная оценка вектора **A**, найденная при сглаживании путем нахождения минимума суммы квадратов ошибок сглаживания, минимизирует также сумму дисперсий составляющих вектора $\tilde{\mathbf{A}}$ и наоборот. Выше показано, что наличие случайной составляющей $\mathring{x}(t)$ полезной части входных величин несколько усложняет дело. Выполнение неравенства (49) в случае операции сглаживания характеризует минимальность дисперсии ошибок сглаживания в любой отдельно взятой точке. Но неравенство (66) показывает, что те же оценки дают минимум суммы дисперсий ошибок сглаживания в точках, для которых даны входные значения. Для определения вектора сглаженных значений $\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$, вообще говоря, недостаточно определить оценку одного только вектора **A**, так как вектор $\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$, как уже указывалось, не является ортогональной проекцией входного вектора **YS** в подпространство N_m. Сама же оценка вектора **A**, найденная по формуле (40), оптимальна в смысле, указанном неравенствами (83) и (86). Для полного определения вектора $\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}$ по формуле (67) в виде разложения в векторы ортонормированного базиса пространства N требуется определить, кроме вектора $\mathbf{A}_{\parallel}$, и вектор $\mathbf{A}_{\perp}$, что можно сделать, например, по формуле (41). Тот же результат, конечно, дает непосредственное применение формул (53) и (54). Рассмотрим эти два подхода более детально для случая любого допустимого оператора L.

Два подхода к задаче об оптимальном линейном преобразовании

Первый подход характеризуется непосредственным применением (в соответствии с (7)) матрицы (вектора) оптимального преобразования, подсчитанной для требуемого вида линейного оператора L по формуле (27) или (30). Подстановка (30) и (39) в (7) дает

$$z(t_r) = \mathbf{A}_{\parallel}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} + \mathbf{A}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \tag{87}$$

или после подстановки из (40) и из (41)

$$z(t_r) = \mathbf{YSFV}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} + \mathbf{YSF}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}. \tag{88}$$

Обозначим вектор $\mathbf{W}$, подсчитанный для конкретного оператора L, через $\mathbf{W}_L$. Тогда первый подход к решению задачи характеризуется применением равенства

$$z(t_r) = \mathbf{YW}_L. \tag{89}$$

Вводя теперь вектор $\mathbf{X}_t{}^{\mathrm{T}}$

$$(\mathbf{X}_t{}^{\mathrm{T}})_{m,1} = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{Vmatrix} \tag{90}$$

и вектор

$$\mathbf{C}_t{}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \overline{\dot{x}(t)\,[\dot{x}(t_1) + \dot{x}(t_1)]} \\ \vdots \\ \overline{\dot{x}(t)\,[\dot{x}(t_n) + \dot{x}(t_n)]} \end{Vmatrix}, \tag{91}$$

можно частный случай уравнения (87), справедливый для операции сглаживания в произвольной точке t, записать как

$$\tilde{y}(t) = \mathbf{A}_{\parallel}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_t{}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_t{}^{\mathrm{T}}. \tag{92}$$

Предполагая, что

$$L\{\overline{\dot{x}(t)\,[\dot{x}(t_j) + \dot{x}(t_j)]}\} = \overline{L\{\dot{x}(t)\}\,[\dot{x}(t_j) + \dot{x}(t_j)]}, \tag{93}$$

и понимая под преобразованием вектора новый вектор, составляющие которого равны преобразованным составляющим исходного вектора, можно (87) представить в виде

$$z(t_r) = \mathbf{A}_{\parallel}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}L\{\mathbf{X}_t{}^{\mathrm{T}}\}_{t_r} + \mathbf{A}_{\perp}\mathbf{F}_{\perp}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}L\{C_t{}^{\mathrm{T}}\}_{t_r}. \tag{94}$$

Но так как в уравнении (92) функцией переменной t являются только составляющие векторов $\mathbf{X}_t{}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{C}_t{}^{\mathrm{T}}$, то вследствие линейности оператора L следует из уравнений (92) и (94) равенство

$$z(t_r) = L\{\tilde{y}(t)\}_{t_r}, \tag{95}$$

характеризующее второй подход к решению рассматриваемой задачи определения $z(t_r)$. Он заключается в определении $\mathbf{A}_{\parallel}$ и $\mathbf{A}_{\perp}$ по формулам (40) и (41), в их подстановке в выражение для сглаженного значения (92) и, наконец, в выполнении требуемого преобразования L по переменной t, после которого подставляется в результирующую функцию значение $t = t_r$. Преимуществом второго подхода является возможность использования результатов наиболее трудоемких расчетов для решения разных задач, отличающихся как требованиями к типу оператора L, так и к выбору точки t_r (интерполирование, экстраполирование, фильтрация значения функционала L).

Эквивалентность результатов применения указанных двух способов вычислений зависит от предположения (93). Для операций дифференцирования, для интегрирования и для интегралов типа свертки подобные соотношения доказываются в [20]; там же указываются ограничивающие условия, налагаемые на исходные случайные функции. Линейность корреляционных функций вида (93) по отношению к функции от переменной t позволяет рассматривать и линейные комбинации отмечаемых операций.

В заключение следует отметить, что настоящая работа не претендует на полноту изложения, так как в ней затронуты лишь немногие из статистических и других свойств решения поставленной задачи, заслуживающих внимания.

Поступила в редакцию
15 апреля 1965 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L. A., Ragazzini J. R. An Extension of Wiener's Theory of Prediction. J. Appl. Phys., v. 21, No. 7, July, 1950.
2. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. John Wiley and Sons, N. Y., 1950.
3. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 5, вып. 1, 1941.
4. Lees A. B. Interpolation and Extrapolation of Sampled Data. IRE Trans., v. IT-2, March, 1956.
5. Blum M. An Extension of the Minimum Mean Square Prediction Theory for Sampled Input Signals. IRE Trans., v. IT-2, Sept, 1956.
6. Johnson K. R. Optimum, Linear, Discrete Filtering of Signals Containing a Nonrandom Component. IRE Trans., v. IT-2, June, 1956.
7. Blum M. On the Mean Square Noise Power of Optimum Linear Discrete Filter Operating on Polynomial Plus White Noise Input. IRE Trans., v. IT-3, Dec., 1957.
8. Перов В. П. Синтез импульсных цепей и систем с импульсной обратной связью Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 12, 1957.
9. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. Физматгиз, 1958.
10. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.
11. Крутько П. Д. Статистическая динамика импульсных систем. Изд-во «Советское радио», 1963.
12. Волгин Л. Н. Элементы теории управляющих машин. Изд-во «Советское радио», 1962.
13. Guest P. D. Numerical Methods of Curve Fitting. University Press, Cambridge, 1961.
14. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1962.
15. Семенов В. М. К теории экстраполирования случайных процессов. Сб. научн. трудов ВВИА им. Жуковского, т. 1, 1954.
16. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME, March, 1950.
17. Tou J. F., Joseph P. D. Modern Synthesis of Computer Control Systems. IREE Trans, Appl. Ind., No. 66, May, 1963.
18. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Физматгиз, 1965.
19. Колмогоров А. Н. К обоснованию метода наименьших квадратов. Усп. матем. наук, т. 1, вып. 1, 1946.
20. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1962.

GENERALIZED DISCRETE ANALOG OF THE ZADEH—RAGAZZINI'S PROBLEM

P. KOVANIC

A matrix solution of the generalized discrete analog of the Zadeh — Ragazzini's problem is presented and its relationship with the statistical estimation of linear forms and with indirect observation processing are pointed out. The extremal features of the solution and matrix form of the solution gives a possibility to eliminate repeating of a greater part of calculations in case of similar problems.