

Československá akademie věd

Kolegium technické kybernetiky a elektrotechniky

Ing. Pavel Kovanic, CSc.

GNOSTICKÁ TEORIE NEURČITÝCH DAT

Disertační práce k získání vědecké hodnosti
doktora technických věd
ve vědním oboru 25-15-9 Technická kybernetika

Disertační práce vznikla při plnění úkolů SPZV
v Ústavu teorie informace a automatizace ČSAV

Praha, březen 1990

Československá akademie věd

Kolegium technické kybernetiky a elektrotechniky

Ing. Pavel Kovanic, CSc.

GNOSTICKÁ TEORIE NEURČITÝCH DAT

Disertační práce k získání vědecké hodnosti
doktora technických věd
ve vědním oboru 25-15-9 Technická kybernetika

Disertační práce vznikla při plnění úkolů SPZV
v Ústavu teorie informace a automatizace ČSAV

Praha, březen 1990

OBSAH

SYMBOLY A ZNAČENÍ

Všeobecné poznámky k symbolice	A.6
Číslování stránek, odstavců, vzorců a formalizovaných tvrzení	A.6
Jednotlivé značky	146
Abecední seznam nelokálních symbolů s latinskými písmeny	146
Abecední seznam nelokálních symbolů s řeckými písmeny ...	150

1 ÚVOD

1.1 Stav problematiky	1
1.2 Cíl disertace	3
1.3 Zvolené metody zpracování	3

2 MOTIVACE A VÝCHODISKA GNOSTICKÉ TEORIE DAT

2.1 Gnostický systém	3
2.2 Ideální a praktická kvantifikace	5

3 GNOSTICKÁ TEORIE INDIVIDUÁLNÍCH DAT

3.1 Aditivní a multiplikační model neurčitých dat	8
3.2 Struktury dvojic a jejich vlastnosti	10
3.2.1 Struktura dvojic neurčitostí	11
3.2.2 Struktura dvojic neurčitých dat	11
3.3 Maticový model neurčitých dat	12
3.4 Párová čísla	15
3.4.1 Algebraické vlastnosti párových čísel	15
3.4.2 Geometrizační párových čísel	18
3.5 Analytické vlastnosti párových funkcí	27
3.6 Kvantifikační a estimační operátory	30
3.6.1 Gnostické události a gnostické operátory	30
3.6.2 Kvantifikační struktura gnostických událostí	33

3.6.3	Estimační struktura neurčitých dat a estimační operátor	34
3.6.4	Jedinečnost kvantifikačního a estimačního modelu dat	35
3.6.5	Trojice gnostických operátorů	36
3.7	Metrický prostor gnostických událostí a gnostický pohyb	37
3.7.1	Vzdálenosti a rychlosti	37
3.7.2	Gnostické cesty a vztahy mezi nimi	39
3.7.3	Variační teorém pro gnostické cesty	41
3.8	Váha a irrelevance jednotlivého data	44
3.8.1	Algebraická a geometrická interpretace váhy a irrelevance	46
3.8.2	Statistická interpretace váhy a irrelevance	46
3.8.3	Termodynamická interpretace gnostické váhy: entropie data	47
3.8.4	Difúze entropie	49
3.9	Informační změny a distribuční funkce individuálních dat	52
3.9.1	Vzájemná přeměna entropie a informace	52
3.9.2	Distribuční funkce a hustota datové dvojice	57
3.9.3	Motivace pro informační interpretaci gnostických funkcí	62
3.10	Ideální gnostický cyklus a jeho vlastnosti	65
3.10.1	Ideální a alternativní cyklus	65
3.10.2	Variační teorém pro změny entropie a informace	68
3.10.3	Rezidua entropie a informace	72
3.10.4	Optimalita estimační cesty	73
3.10.5	Ideálnost gnostického cyklu	74
3.11	Izomorfismus gnostického a fyzikálního modelu jevů ..	75
3.11.1	Relativistická struktura	75
3.11.2	Mezivědní izomorfismus	76

4 GNOSTICKÁ TEORIE SOUBORŮ NEURČITÝCH DAT

4.1 Kompoziční zákon neurčitých dat	77
4.1.1 Motivace aditivního skládání chyb dat a jejich čtverců	77
4.1.2 Gnostický kompoziční zákon	79
4.2 Index datového souboru	83
4.3 Vlastnosti gnostických charakteristik datového souboru	87
4.3.1 Aditivita gnostických charakteristik	87
4.3.2 Citlivost aditivních gnostických charakteristik	88
4.4 Gnostické distribuční funkce a hustoty datového souboru	90
4.4.1 Aditivní distribuční funkce a hustota datového souboru	90
4.4.2 Statistické vlastnosti aditivních gnostických distribučních funkcí	92
4.4.3 Robustnost aditivních distribučních funkcí	94
4.4.4 Globální distribuční funkce a hustota datového souboru	95
4.4.5 Robustnost globální distribuční funkce	90
4.4.6 Ostatní vlastnosti globální distribuční funkce a hustoty	97

5 TEORETICKÉ A METODICKÉ ZÁKLADY GNOSTICKÝCH ALGORITMŮ

5.1 Odhadování parametru měřítka	98
5.1.1 Lokální parametr měřítka	99
5.1.2 Globální parametr měřítka	100
5.1.3 Univerzální parametr měřítka	102
5.2 Testování homogenity datových souborů	103
5.3 Gnostická shluková analýza	104
5.4 Odhadování distribučních funkcí a hustot dat	105
5.5 Odhadování pravděpodobnostních distribucí a hustot ..	105

5.6 Odhadování kvantilů distribučních funkcí	105
5.7 Robustní odhadování parametrů polohy a jejich užití ..	106
5.7.1 Robustní odhadování mediánu	106
5.7.2 Gnostické m-odhady parametrů polohy	106
5.7.3 Robustnost gnostických m-odhadů	109
5.7.4 Statistické vlastnosti gnostických m-odhadů	111
5.7.5 Určování gnostických M-odhadů	112
5.7.6 Globální parametr polohy	112
5.7.7 Odhadování intervalu typických hodnot dat	113
5.7.8 Odhady mezi tolerančního intervalu parametru polohy	114
5.7.9 Robustní testování shody malých souborů dat	115
5.8 Robustní odhadování kovariančních koeficientů	115
5.9 Robustní odhadování parametrů regresního modelu	116
5.9.1 Gnostická formulace a řešení identifikačního problému	116
5.9.2 Robustnost gnostického řešení identifikační úlohy ..	119
5.9.3 Statistické vlastnosti gnostického identifikačního procesu	120
5.10 Další možnosti využití gnostické teorie	121
 6 VÝVOJ, OVĚŘOVÁNÍ A VYUŽÍVÁNÍ GNOSTICKÝCH PROGRAMŮ	
6.1 Přehled existujících gnostických programů	121
6.1.1 Gnostické analyzátory dat	121
6.1.2 Gnostické monitory procesů	122
6.1.3 Gnostické identifikátory	123
6.1.4 Gnostický regulátor	124
6.2 Ověřování gnostických metodik	125
6.2.1 Srovnání statistických a gnostických odhadů parametru polohy na reálných datech	125
6.2.2 Simulační srovnání robustních estimátorů parametru polohy	127
6.2.3 Simulační testy globálních distribučních funkcí	129

6.3 Ověřování gnostických algoritmů na praktických aplikacích ...	129
6.3.1 Výběrová kontrola stacionarity a homogenity výroby	130
6.3.2 Příklad gnostické shlukové analýzy	130
6.3.3 Příklad gnostické intervalové analýzy	131
6.3.4 Příklad užití tolerančních intervalů parametru polohy	131
6.3.5 Příklad užití globálních gnostických distribučních funkcí	131
6.3.6 Příklad užití gnostického monitoru	132
6.3.7 Příklady užití gnostické identifikace regresního modelu ...	132
7 UPLATNĚNÍ GNOSTIKY V PRAXI	133
ZÁVĚRY	134
Poděkování	136
Literatura	137
REJSTŘÍK HLAVNÍCH POJMŮ GNOSTICKÉ TEORIE	141

SYMBOLY A ZNAČENÍ

Všeobecné poznámky k symbolice:

Velká písmena označují konstanty, malá písmena téhož typu proměnné. Matice a vektory se značí podtržením. Pruh nad párovým číslem odlišuje párové číslo sdružené. Pruh nad symbolem posloupnosti (4.3.1-1) symbolizuje aritmetický průměr členů této posloupnosti.

Pod funkcí $\log(\cdot)$ se rozumí přirozený logaritmus.

Goniometrické funkce jsou zapisovány jako $\cos(\cdot)$, $\sin(\cdot)$, $\tan(\cdot)$ a $\arctan(\cdot)$, zatímco pro hyperbolické funkce se užívá $\cosh(\cdot)$, $\sinh(\cdot)$, $\tanh(\cdot)$ a $\operatorname{arctanh}(\cdot)$.

Formalizovaná tvrzení (definice, axiómy, lemmata, věty a jejich důsledky) a rovněž významné motivační úvahy mají podtržený název a jejich text je na levé straně odsazen. Konec důkazu je na pravé straně vyznačen černým trojúhelníkem.

Číslování stránek, odstavců, vzorců a formalizovaných tvrzení:

Stránky předběžného textu (obsahu a symboliky) jsou značeny A.1, A.2, ... Hlavní text včetně závěru, seznamu literatury a hlavních pojmů gnostické teorie je stránkován jen číselně. Vyobrazení nejsou stránkována, mají svá vlastní pořadová čísla. Jsou umístěna jako poslední.

Práce je členěna do kapitol, ty do článků, které jsou v případě potřeby dále členěny do odstavců. Je použito podřadující číslování odstavců. Tak pod symbolem 4.3.1 se rozumí první odstavec třetího článku čtvrté kapitoly. V té pak je (4.3.1-2) druhým vzorcem. Definice, axiómy, lemmata a věty se číslovají v celé práci průběžně, důsledky vět nesou číslo věty a číslo důsledku této věty. Tak "důsledek 14.2" značí druhý důsledek věty čtrnáct.

Podrobný přehled užívaných značek je uveden v závěru práce.

1 ÚVOD

1.1 Stav problematiky

Vznik a rozvoj kybernetiky umožnil prohloubit a metodicky obohatit výzkum poznávacího procesu. Po tisíciletí byl poznávací proces předmětem ryze verbálních filozofických disputací, dnes je i objektem exaktní matematické analýzy. Problém kybernetizace teorie poznání se stal jedním z nejaktuálnějších směrů vědeckotechnické revoluce [1], a to nejen pro svůj principiální význam, ale i z naléhavých praktických důvodů: Úspěch jeho řešení podmiňuje zavádění vysoce automatizovaných výrobních, vědeckých, zdravotnických, pedagogických, vojenských i dalších technologií, zdokonalování robotů i skutečnou racionalizaci řízení ekonomiky i státní správy. Mezi světem a milióny počítačů, které mají pomáhat v jeho poznávání a řízení, musí proudit záplava informace zpracovávaná vysoce efektivními kognitivními systémy. Počítače však potřebují algoritmy. Cílem proto musí být taková teorie poznávacího procesu, která povede k spolehlivým a účinným kognitivním algoritmům.

Ústřední myšlenku kybernetiky spatřuje [1] ve statistickém přístupu k problému organizace a řízení a – v aplikaci na poznávací proces – ve "vnoření" poznávacího systému do statistického, pravděpodobnostního prostředí. K tomuto pojetí se ještě vrátíme. Zde je důležité podotknout, že hromadné využívání statistických metod v praxi, umožněné rozvojem výpočetní techniky, ukázalo na závažná omezení použitelnosti statistického přístupu v určitých praktických podmínkách, na potíže plynoucí z rozporu mezi předpoklady statistických modelů a realitou odraženou v datech. Jednou ze závažných příčin tohoto rozporu byla nedostatečná robustnost statistických metod. Tomuto problému byla dlouho věnována relativně malá pozornost, dnešní potíže jsou však spíše v tom, že již existuje příliš mnoho robustních statistických metod, v některých podmínkách úspěšných a jindy selhávajících. Takové metody je však riskantní zavádět do automatizovaných systémů. Závažné je i teoretické hledisko. Různé přístupy a metody robustní statistiky se vzájemně liší různými stupni využití heuristických prvků i svým propojením s formálně dokonalým

teoretickým základem nerobustní statistiky. Snad nejzávažnějším problémem je však sám statistický model neurčitosti. Jako matematika vůbec je statistika obezřetně vybudována jako abstrahovaný, ideální svět. Její závěry jsou samozřejmě správné, jsou-li splněny její předpoklady; to je zajištěno matematickými prostředky. Adekvátnost přijatých předpokladů skutečným jevům je však mnohdy ověřitelná jen obtížně, zejména nelze-li zajistit dostatečně mohutné soubory dat získané opakovaným pozorováním za srovnatelných situací. Výsledky zpracování malých datových souborů jsou navíc citlivé k výskytu hrubých chyb dat. To vše vede k pochybnostem o možnosti vytvořit obecněji použitelnou teorii kvantitativního poznávacího procesu na výhradně statistickém základě, i když taková teorie by měla být se statistikou konzistentní v případech, kdy je statistický model vhodným a osvědčeným popisem reality.

Potřeba nestatistického modelu neurčitosti a nestatistických metod zpracování neurčitých dat pro situace, kdy se neurčitost vymyká statistickému popisu, byla motivací vytvoření teorie neostrých množin i hnací silou značného rozvoje této teorie a jejích aplikací. Fundamentální problém kvantifikace neurčitosti se však v této teorii neřeší, o množství neurčitosti dat rozhoduje subjekt zadáním hodnot charakteristické funkce dat. Druhým fundamentálním problémem je způsob skládání těchto funkcí při vytváření neostrých množin. Tento problém se řeší přijetím axiomů, jejichž oprávněnost bývá předmětem sporů a pochybností, možná i proto, že teorie neostrých množin nepřivedla zatím k prakticky využitelným výsledkům, které by významně překonávaly výsledky statistických metod.

Uvedené úvahy přivedly autora k pokusu vytvořit alternativní teorii neurčitosti dat na základě metod a matematických prostředků, které jsou již dlouho známy, avšak které k modelování neurčitých jevů patrně dosud použity nebyly. Východiska byla nalezena v teorii měření, v neeuklidovských geometriích a ve fyzice. Výsledky a nové poznatky disertace vyložené v kap.3, 4 a 5 ukazují, že nastoupená netradiční cesta představuje úspěšný směr výzkumu. Kapitola 6 dokládá, jak se konkrétní závěry vyplývající

z gnostické teorie již uplatňují ve společenské praxi i v dalším rozvoji vědy. Teoretickým i metodickým otázkám aplikací gnostické teorie bylo totiž nutné věnovat značné úsilí, neboť po publikování prvního výkladu tohoto nového přístupu v [1], [2] a [3] jeho nezvyklost a zejména hlavní myšlenka o matematickém modelu neurčitosti jednotlivého data vyvolávaly teoretické diskuse.

1.2 Cíl disertace

Cílem disertace je matematické modelování zákonitostí kvantitativního procesu poznávání reality vycházející z jednoduchých a prakticky zdůvodnitelných předpokladů a vyúsťující v algoritmi-zovatelných metodách zpracování malých datových souborů, silně rušených neurčitostí neznámé povahy. Hlavním požadavkem kladeným na tyto metody má být maximální čerpání informace z dat.

1.3 Zvolené metody zpracování

K dosažení stanoveného cíle byly zvoleny tyto metody:

- 1) Volba jednoduchých axiómů zdůvodněných uznáním jednoty světa a nutností mezivědní konzistence
- 2) Využití matematiky (algebry, geometrie a analýzy)
- 3) Využití myšlenkových experimentů pro vyjasnění souvislostí mezi informační a termodynamickou stránkou jevů, jakož i mezi zákonitostmi kvantitativního poznávání pod vlivem neurčitosti a zákonitostmi relativistické mechaniky
- 4) Využití počítačů a reálných i simulovaných dat k ověřování nových algoritmů a ke srovnávání s metodami klasické i robustní statistiky i se známými metodami kybernetiky

2 MOTIVACE A VÝCHODISKA GNOSTICKÉ TEORIE DAT

2.1 Gnostický systém

V soudobém pojetí je poznávací proces charakterizován jako činnost kybernetického systému, sestávajícího z poznávaného objektu a poznávajícího subjektu, mezi nimiž existuje oboustranná in-

terakce (např. přenos informace nebo zásah). Tento systém se nazývá v [1] GNOSTICKÝM, proto teorii vytvářející matematický model jeho níže vymezených aspektů nazveme gnostickou. Volba takového názvu je motivována původním významem řeckého slova GNÓSIS (poznání), které tvoří kořen mnoha moderních denně užívaných slov, a nikoliv s jeho přeneseným významem, spjatým s ostrými filozofickými a náboženskými spory pozdního starověku [5].

Uvedené systémové pojetí poznávacího procesu převezmeme, i když je patrné, že rozhraní mezi objektem a subjektem může být často definováno jen vágně. Budeme se přitom zabývat pouze poznáváním kvantitativních vlastností objektů, přičemž pod KVANTITOU budeme ve shodě s [6] rozumět takovou určitost věci, pomocí níž lze věc (reálně či myšlenkově) rozdělit na stejnorodé části a shrnout tyto části v jedno. Tato definice odpovídá silně kvantitativním aspektům [7], tj. takovým vlastnostem objektů, které připouštějí nejen rozlišování stupně, ale i velikosti. Proto budeme pojem KVANTIFIKACE chápat v užším smyslu [7], tj. jako empiricko-matematickou proceduru měření a/nebo čítání, zobrazující silně kvantitativní aspekty reálných objektů na čísla. Výsledky kvantifikace budeme nazývat DATA (v jednotném čísle DATUM).

Již citované stanovisko [1], podložené odvoláním na Norberta Wienera, že ústřední myšlenkou kybernetiky je statistický přístup a že gnostický systém mohl vzniknout a rozvíjet se jen jako systém pravděpodobnostní povahy, akceptovat nemůžeme. Poznávací systémy, kterým nyní dáváme název "gnostické", jistě vznikaly a rozvíjely se v přírodě dávno před vznikem matematiky; nepochybně za působení neurčitosti, avšak statistické či pravděpodobnostní modely by sotva mohly vysvětlit tu překvapující účinnost, s níž přírodní systémy zpracovávají i jednotlivé, nehromadné vstupní signály a učí se z nich. Místo na představách o náhodné povaze neurčitosti se proto pokusíme vytvořit matematický model silně kvantitativních aspektů gnostického systému, založený na deterministickém chápání neurčitosti:

- 1) Neurčitost kvantifikace spočívá v nedostatečném poznání.
- 2) I neurčitost jednotlivých, nehromadných jevů je podřízena zákonitostem využitelným pro dokonalejší kvantitativní po-

znávání světa.

Pod kvantifikací rozumíme přímou vazbu od objektu k subjektu. Zpětnou vazbu gnostického systému od subjektu k objektu nazveme ESTIMACÍ. Tak označíme odhadování skutečné hodnoty poznávané kvantitativy z výsledků kvantifikace zkrácených vinou neurčitých (protože neurčených) faktorů. Pod estimací tedy rozumíme zobrazování dat na reálná čísla či množiny reálných čísel. Výsledky estimace nazveme ODHADY.

2.2 Ideální a praktická kvantifikace

Kvantifikace je zobrazení nematematické struktury, nazvané v [7] empirickou relační strukturou, do struktury číselné. Nosičem empirické relační struktury je množina kvantit, tedy "empirických" objektů. Na množině kvantit jsou definovány binární relace, které umožňují tuto množinu faktorizovat na ekvivalenční třídy a tyto třídy uspořádat. Je na ní definována i binární operace skládání kvantit. Jak tato operace, tak i obě relace mají "empirickou", tj. nematematickou povahu. Například, ekvivalence hmotnosti hromádky mouky s hmotností kilogramového závaží se testuje empirickou procedurou zvanou vážení. Skládání kvantit se realizuje v tomto případě přisypáváním či odsypáváním mouky.

Kvantifikace má umožňovat odvozování vztahů mezi kvantitami ze vztahů mezi jejich číselnými obrazy. Konzistenci takového postupu se snaží teorie měření zajistit tím, že přenáší do empirické oblasti požadavky, které jsou ekvivalenty axiomů matematických struktur, jakož i tím, že požaduje epimorfismus empirické a numerické struktury [7]. Z hlediska matematiky tento postup přináší řadu problémů, které dosud uspokojivě vyřešeny nejsou. Omezíme se proto na úvahy využitelné jako motivace axiomu modelu dat. Nepřevzeme v plném rozsahu axiomatiku teorie měření podle [7]. Tím nechceme podceňovat význam této teorie, která vědeckým způsobem shrnuje zkušenosti lidstva, shromažďované a rozvíjené po celá tisíciletí. Vždyť měření a čítání podmiňovalo směnu zboží a rozvoj hospodářství vůbec a zpětně působilo na rozvoj věd. Pro náročnou úlohu modelování kvantifikace probíhající pod vlivem

neurčitosti se pokusíme na teorii měření navázat.

Povšimněme si především toho, že kvantifikace v pojetí teorie měření je zobrazením homomorfním a izotónním. Dále, teorie měření podle [7] zkoumá pouze zákonitosti přesné kvantifikace a potlačení vlivů případné neurčitosti svěřuje dodatečnému (statistickému) zpracování dat. Kvantifikaci nerušenou neurčenými vlivy, interpretovatelnou jako izotónní homomorfismus, vnořující empirickou relační strukturu do tělesa reálných čísel, budeme nazývat IDEÁLNÍ KVANTIFIKACÍ. Data, která by byla výsledkem ideální kvantifikace, nazveme IDEÁLNÍMI HODNOTAMI kvantit. Budeme předpokládat, že opakovaná ideální kvantifikace téže kvantity by dala tutéž ideální hodnotu.

Axiómy přijímané v [7] vymezují empirickou relační strukturu jako aditivní uspořádanou archimedovskou pologrupu. Gnostická teorie se zabývá modelem neurčitosti dat. Má-li být tento model dostatečně obecný, musí zahrnout i případ dat, která zkreslena neurčitostí nejsou, i když se taková data vyskytnou vzácně nebo jen jako "limitní" případ. Proto je třeba připustit existenci neutrálního prvku struktury ("nuly" jako prvku empirické relační struktury), který je v [7] vyloučen. Kvantifikací často hodnotíme změny kvantit; i proto můžeme potřebovat "empirickou nulu" jako model nepozorovatelné změny. Data mohou být neurčitostí poškozována v obou směrech, proto je třeba připustit i existenci inverzních prvků. Gnostická teorie bude budována pro případ neomezených dat, proto na rozdíl od [7] přijmeme předpoklad, že datové struktury jsou uzavřené k operaci skládání. Tuto operaci budeme považovat za asociativní a komutativní. To vše znamená, že empirickou relační strukturu neurčitostí modelujeme aditivní grupou. Data je třeba i numericky zpracovávat, proto obdobně s [7] musíme připustit násobení obrazů kvantit čísly. Modelem empirické relační struktury je pak těleso reálných čísel.

Rozhodujeme-li se přistoupit ke kvantifikaci nějakého jevu, přijímáme předpoklad, že kvantita, která je cílem našeho poznávání, existuje, a že existuje i ideální hodnota data, která je jejím obrazem. Tuto kvantitu nazveme POZNÁVANOU kvantitou. Zkušenost

však ukazuje, že opakovaná kvantifikace téže poznávané kvantity nedává shodné výsledky. Tato neshoda je způsobena souhrnem blíže nespecifikovaných vlivů, který budeme nazývat NEURČITOSTÍ. Přijmeme stanovisko, že tato neurčitost je determinována sice nepoznanými, avšak poznatelnými vlivy. Ty mají materiální podstatu stejně jako poznávaná kvantita a mají rovněž své kvantitativní stránky. Může jich být mnoho, avšak jejich rozčlenění je v dané etapě poznávání nedostupné. Proto shrneme blíže nerozlišené kvantity způsobující neurčitost kvantifikace poznávané kvantity do kvantity jediné, kterou nazveme RUŠIVOU. Taková diferenciace kvantit je nezbytně relativní a subjektivní. Tatáž kvantita může být vzhledem k jednomu cíli a pro určitého pozorovatele poznávanou kvantitou a pro jiný účel a jiného pozorovatele rušivou kvantitou. Příkladem může být měření prostorových a časových závislostí teplotního pole. Nepřesné určení času ruší kvantifikaci prostorové závislosti teploty a neurčitost prostorových souřadnic ruší kvantifikaci okamžité teploty. Role poznávané a rušivé kvantity jsou tedy symetrické a mohou být vzájemně zaměňovány. I rušivá kvantita může být za nějakých podmínek poznatelná, sama může být objektem ideální kvantifikace a mít svou ideální hodnotu. Tuto symetrii rolí obou kvantit je třeba vystihnout jako symetrii modelu dat. Ideální kvantifikace jak rušivé, tak i poznávané kvantity je přijímána jako izotónní homomorfismus. PRAKTICKOU KVANTIFIKACÍ nazveme zobrazení kartézského součinu empirických relačních struktur poznávaných a rušivých kvantit do tělesa reálných čísel. Výsledky praktické kvantifikace nazveme DATA. Pro studium teoretických vlastností datových souborů je účelné rozšířit množinu zkoumaných dat. Za MOŽNÁ označíme data, která buď již skutečně byla získána kvantifikací, nebo která by za nějakých okolností výsledkem kvantifikace být mohla.

Při užívání zavedených pojmů si budeme vědomi toho, že zakládají zjednodušený formální model, který nemůže přesně postihnout nevyčerpatelnou složitost reality.

3. GNOSTICKÁ TEORIE INDIVIDUÁLNÍCH DAT

Cílem této kapitoly je vytvoření matematického modelu kvantifikačního a estimačního procesu, odvození a interpretace vzorců gnostických charakteristik jednotlivých dat, jejich chyby, váhy, distribuční funkce, informační ztráty a přírůstku entropie. Dokazují se zákonitosti ideálního gnostického cyklu a rovnice konverze informace na entropii a naopak. Dokazuje se izomorfismus gnostických jevů a jevů relativistické fyziky.

3.1 Aditivní a multiplikativní model neurčitých dat

Zatímní výklad měl povahu motivačních úvah. V dalším je třeba přejít k formalizovaným tvrzením. K tomu přijímáme předpoklad, že je k dispozici jazyk, pojmy a tvrzení elementární (Cantorovy) teorie množin, matematické analýzy a geometrie. Další výklad bude probíhat ve dvou souběžných liniích: cestou formalizovaných tvrzení (značených jako definice, axiomy, lemmata, věty, důsledky a důkazy) a cestou dalších motivačních a interpretačních úvah uváděných ve tvaru doprovodného textu.

V následující definici i v dalším textu budeme jak v rovině matematické, tak i motivační a interpretační užívat tytéž pojmy (jako ideální hodnoty, data, neurčitosti apod.). Protože obě roviny jsou v dalším výkladu oddělovány, nedejde ke konfúzím, a přitom bude usnadněna interpretace těchto pojmů.

Definice 1: Buďte A_0 , \mathcal{A} a \mathcal{N} neprázdné množiny. Prvky množiny A_0 budeme nazývat IDEÁLNÍMI HODNOTAMI, prvky množiny \mathcal{A} DATY a prvky množiny \mathcal{N} NEURČITOSTMI. Budiž \mathbb{R}^1 množina reálných čísel a \mathbb{R}_+ množina kladných reálných čísel. Uvažujme následující zobrazení:

$$\nu: A_0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (3.1-1)$$

$$g: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (3.1-2)$$

$$\nu: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (3.1-3)$$

$$\sigma: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \quad (3.1-4)$$

$$\pi: A_0 \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A} \quad (3.1-5)$$

Zobrazení ν a ν budeme nazývat IDEÁLNÍ KVANTIFIKACÍ, zobrazení π PRAKTICKOU KVANTIFIKACÍ. Definiční oblast nějakého zobrazení ξ budeme značit $\text{Dom}(\xi)$, jeho oblast hodnot $\text{Ran}(\xi)$.

Vzhledem k tomu, že definovaná zobrazení zůstanou zachována v celém následujícím textu, můžeme (a budeme) mluvit o reálném čísle jako o ideální hodnotě (resp. jako o neurčitosti či datu), majíce na mysli ideální hodnotu (resp. neurčitost či datum) na toto číslo zobrazenou a také naopak. Rozlišení numerických obrazů od zobrazovaných prvků definičních oborů bude patrné z kontextu. Konstanty budou značeny velkými, proměnné malými písmeny. Právě uvedený model nebudeme uvažovat v jeho plné obecnosti, ale omezíme se na speciální případ vymezený následujícím axiómem:

AXIÓM 1 (axióm aditivního modelu možných dat):

A1.1: Zobrazení ν , ν a ν jsou vzájemně jednoznačná a oblast hodnot $\text{Ran}(\nu)$ je totožná s \mathbb{R}^1 .

A1.2: Zobrazení ν je izomorfismem mezi strukturou

$$\mathcal{G}_\sigma := \langle \mathcal{N}, \sigma \rangle, \quad (3.1-6)$$

a aditivní grupou $\langle \mathbb{R}^1, + \rangle$.

A1.3: Existuje $S \in \mathbb{R}_+$ tak, že pro každé $a_0 \in \mathcal{A}_0$ a $n \in \mathcal{N}$ platí

$$\nu(\pi(a_0, n)) = \nu(a_0) + S\nu(n). \quad (3.1-7)$$

Z tvrzení A1.2 tedy vyplývá, že platí

$$(\forall n_1, n_2 \in \mathcal{N})(\nu(\sigma(n_1, n_2)) = \nu(n_1) + \nu(n_2)). \quad (3.1-8)$$

Označme

$$A := \nu(\pi(a_0, n)), \quad A_0 := \nu(a_0), \quad \Phi := \nu(n). \quad (3.1-9)$$

Pak lze (3.1-7) přepsat jako vztah

$$A = A_0 + S\Phi \quad (A, A_0, \Phi \in \mathbb{R}^1, S \in \mathbb{R}_+), \quad (3.1-10)$$

který nazveme ADITIVNÍ FORMOU MOŽNÝCH DAT. Data A nazveme ADITIVNÍMI DATY, kladné číslo S PARAMETREM MĚŘÍTKA. Zavedení parametru měřítka umožní později, při práci s datovými soubory, respektovat to, že jednotlivá data mohou pocházet z různě rozptýlených souborů. Parametr měřítka unifikuje stupnici, v níž budeme poměřovat intenzitu vlivu neurčitosti.

Definie 2: MULTIPLIKATIVNÍMI DATY nazveme aditivní data transformovaná dle vztahu

$$Z := \exp(A). \quad (3.1-11)$$

Z (3.1-10) a (3.1-11) plyne

$$Z = Z_0 \exp(S\Phi), \quad (3.1-12)$$

kde

$$Z_0 = \exp(A_0). \quad (3.1-13)$$

Platí tedy i

$$Z^{1/S} = Z_0^{1/S} \exp(\Phi). \quad (3.1-14)$$

Vztah (3.1-14) nazveme MULTIPLIKATIVNÍ FORMOU MOŽNÝCH DAT.

Tyto formy dat založené na modifikaci modelu ideální kvantifikace, přijímaného v teorii měření, jsou pro gnostickou teorii formami základními. Z toho však neplyne nepoužitelnost gnostické teorie pro jiné formy dat. Čísla spjatá s multiplikativními (a tedy i s aditivními) daty vhodnou transformací lze rovněž nazývat daty, je třeba však vždy uvést jejich formu. Příkladem jsou data z omezeného číselného intervalu, charakterizující např. relativní zastoupení jevu (0 až 100%), poměrné zatížení motorgenerátoru vozidla (-100% až +100%) aj. Po přezkoumání původu a metody přípravy dat však lze přejít vhodnou transformací k datům majícím multiplikativní formu, pro kterou budeme odvozovat gnostické charakteristiky.

Poznamenejme ještě, že aditivní formu dat jsme motivovali návazností na teorii měření. Obdobná forma dat se však často přijímá i jako východisko statistických analýz.

3.2 Struktury dvojic a jejich vlastnosti

Každé datum, které dostaneme z kvantifikace, je jediné číslo. To je podle prvního axiómu součtem dvou složek. Takový rozklad data prakticky uskutečnit nemůžeme, lze však pro něj vytvářet teorii, která by nám nakonec umožnila rozložit každé datum z nějakého souboru alespoň přibližně. Vyjdeme tudíž z toho, že úplným popisem data je dvojice $\langle A_0, \Phi \rangle$ ideálních hodnot poznávané a rušivé

kvantity, a posoudíme s použitím prvního axiómu, jaké vlastnosti lze najít u struktur takových dvojic.

3.2.1 Struktura dvojic neurčitostí

Z axiómu 1 bezprostředně vyplývá, že pro strukturu (3.1-6) platí

$$(\exists! n_0 \in \mathcal{N})(n_0 = v^{-1}(0))(0 \in \mathbb{R}^1), \quad (3.2.1-1)$$

$$(\forall n \in \mathcal{N})(\exists \bar{n} \in \mathcal{N})(\sigma(n, \bar{n}) = \delta(\bar{n}, n) = v^{-1}(0)), \quad (3.2.1-2)$$

$$(\forall n \in \mathcal{N})(v(\bar{n}) = -v(n)). \quad (3.2.1-3)$$

Neurčitosti i jejich číselné obrazy budeme sdružovat do dvojic $\langle \text{prvek}, \text{inverzní prvek} \rangle$ ($\langle n, \bar{n} \rangle$ a $\langle v(n), v(\bar{n}) \rangle$). Označme

$$\mathcal{D}_n := \{ \langle \bar{\Phi}, -\bar{\Phi} \rangle \mid \bar{\Phi} = v(n), n \in \mathcal{N} \} \quad (3.2.1-4)$$

množinu číselných obrazů dvojic neurčitostí a symbolem + operaci sčítání dvojic reálných čísel po složkách. Pak je zřejmé, že struktura

$$\mathcal{G}_n := \langle \mathcal{D}_n, + \rangle \quad (3.2.1-5)$$

je komutativní grupou izomorfní s grupou \mathcal{G}_0 . Grupa \mathcal{G}_n je tudíž modelem struktury neurčitostí a modelem neurčitých dat majících nulovou ideální hodnotu. Tento model rozšíříme tak, aby vystihl strukturu všech dat.

3.2.2 Struktura dvojic neurčitých dat

Zavedeme množinu

$$\mathcal{D} := \{ d \mid d = \langle A/S, \bar{A}/S \rangle, A = v(a_0) + Sv(n), \bar{A} = v(a_0) - Sv(n), a_0 \in \mathcal{A}_0, n \in \mathcal{N} \}, \quad (3.2.2-1)$$

kde složky dvojice d označíme

$$\langle \text{Pr}(d), \text{Se}(d) \rangle := d, \quad (3.2.2-2)$$

a zobrazení

$$(\mathcal{T}_a : \text{Ran}(v) \times \text{Ran}(v) \rightarrow \mathcal{D})(\langle A_0, \bar{\Phi} \rangle \mapsto \langle A/S, \bar{A}/S \rangle), \quad (3.2.2-3)$$

které je pro každé dané S vzájemně jednoznačné. Zřejmě platí

$$A_0 = (\text{Pr}(d) + \text{Se}(d))/2, \quad \bar{\Phi} = (\text{Pr}(d) - \text{Se}(d))/2. \quad (3.2.2-4)$$

Lemma 1: Budiž

$$\mathcal{D}_0 := \{ \langle A_0/S, \bar{A}_0/S \rangle \mid A_0 = v(a_0), a_0 \in \mathcal{A}_0 \}, \quad (3.2.2-5)$$

$$\mathcal{G}_0 := \langle \mathcal{D}_0, + \rangle. \quad (3.2.2-6)$$

Pak platí, že struktura

$$\mathcal{G}_d := \langle \mathcal{D}, + \rangle \quad (3.2.2-7)$$

je izomorfní s direktním součinem komutativních grup \mathcal{G}_n a \mathcal{G}_0 .

Důkaz: To, že struktura \mathcal{G}_0 je komutativní grupou s neutrálním prvkem $\langle 0, 0 \rangle$, který je jediným společným prvkem grup \mathcal{G}_n a \mathcal{G}_0 , je zřejmé. Podle (3.1-10), (3.2.2-1) a (3.2.2-5) platí

$$(\forall d \in \mathcal{D}_d)(d = \langle A_0/S + \bar{\Phi}, A_0/S - \bar{\Phi} \rangle)(d = \langle A_0/S, A_0/S \rangle + \langle \bar{\Phi}, -\bar{\Phi} \rangle). \quad (3.2.2-8)$$

Obě uvedené grupy můžeme interpretovat jako grupy aditivních operátorů zobrazujících množinu \mathcal{D} do sebe. Odlišnost jejich působení je patrná z invariantů transformací:

$$(\forall d \in \mathcal{D})(\forall d_0 \in \mathcal{D}_0)(\text{Pr}(d) - \text{Se}(d) = \text{Pr}(d + d_0) - \text{Se}(d + d_0)), \quad (3.2.2-9)$$

$$(\forall d \in \mathcal{D})(\forall d_n \in \mathcal{D}_n)(\text{Pr}(d) + \text{Se}(d) = \text{Pr}(d + d_n) + \text{Se}(d + d_n)). \quad (3.2.2-10)$$

Takto jsme získali dvourozměrný aditivní model neurčitých dat \mathcal{G}_d , který nazveme DVOJICOVÝM MODELEM DAT. Každou strukturu izomorfní s dvojitým modelem dat nazveme MODELEM DAT.

V modelu dat lze dvourozměrnou reprezentaci každého data interpretovat jako výsledek dvou nezávislých transformací jediného výchozího data (představeného dvojicí $\langle 0, 0 \rangle$). První transformace představuje vliv konkrétní ideální hodnoty, druhá vliv konkrétní neurčitosti. Invariantem první transformace je příspěvek neurčitosti, invariantem druhé je ideální hodnota.

3.3 Maticový model neurčitých dat

Dvojitý model dat jsme zavedli proto, abychom mohli charakterizovat dvojí vliv na data: vliv ideální hodnoty a vliv neurčitosti. Použili jsme k tomu uspořádanou dvojici $d(a_0, n) = \langle A, \bar{A} \rangle$, jako bychom mohli a priori rozhodnout, která z obou hodnot má být první a která druhá. Ve skutečnosti neznáme nejen hodnotu neurčitosti, ale ani její polaritu. Měli bychom proto pracovat nejen s touto dvojicí, ale současně i s jejím "duálem", s dvoji-

cí $d(a_0, \bar{n}) = \langle \bar{A}, A \rangle$. To je důvod k tomu, abychom charakterizovali každé jednotlivé datum maticí 2×2 . Jsou i další důvody: Dvojrzměrné reprezentace dat vytvářejí dvojrzměrný prostor, na němž operují dvě grupy transformací, jak jsme viděli v lemmatu 1. Lineární reprezentací takových grup jsou grupy čtvercových matic příslušné dimenze. Strukturní operací je pak maticový součin. To nás přivádí k multiplikativnímu modelu dat a jeho využití v maticovém modelu, i když se později ukáže jako možné i účelné vrátit se k modelům dvojicovým.

Pro Z_0 , S a Φ dle (3.1-9)-(3.1-14) zavedeme označení

$$X := Z_0^{1/S} \cosh(\Phi), \quad Y := Z_0^{1/S} \sinh(\Phi), \quad (3.3-1)$$

$$\underline{M}(A_0/S, \Phi) := \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \quad (3.3-2)$$

$$\mathcal{M} := \{ \underline{M}(A_0/S, \Phi) \mid A_0 = \nu(a_0), \Phi = \nu(n), a_0 \in \mathcal{A}_0, n \in \mathcal{N} \}. \quad (3.3-3)$$

Součiny matic budeme psát obvyklým způsobem, bez symbolu operace násobení matic. Jen v nutných případech budeme operaci násobení matic značit symbolem \times .

Věta 1: Budiž

$$\mathcal{Y}_m := \langle \mathcal{M}, \times \rangle. \quad (3.3-4)$$

Platí, že struktura \mathcal{Y}_m je izomorfní se strukturou \mathcal{Y}_d :

Důkaz: Díky vztahům (3.1-13), (3.3-1) a (3.3-2) je zobrazení

$$(\tau_m: \text{Ran}(\nu) \times \text{Ran}(\nu) \rightarrow \mathcal{M})(\langle A_0, \Phi \rangle \mapsto \underline{M}(A_0/S, \Phi)) \quad (3.3-5)$$

pro každé dané S bijekcí mající inverzi

$$A_0 = S \log(X^2 - Y^2)/2, \quad (3.3-6)$$

$$\Phi = \text{arctanh}(Y/X), \quad (3.3-7)$$

jak se lze přesvědčit. Protože bijekcí je i zobrazení τ_a (3.2.

2-3), je vzájemně jednoznačné i zobrazení $\tau_m \circ \tau_a^{-1}$. Navíc ze (3.

2.2-4) vyplývá pro všechna $d_j = \langle A_j/S, \bar{A}_j/S \rangle \in \mathcal{D}$ (taková, že $A_j/S = A_{0j}/S + \Phi_j$, $j=1, 2$) platnost vztahu.

$$\tau_m(\tau_a^{-1}(d_1+d_2)) = \underline{M}(A_{o1}/S+A_{o2}/S, \Phi_1+\Phi_2) = \underline{M}(A_{o1}/S, \Phi_1)\underline{M}(A_{o2}/S, \Phi_2). \quad (3.3-8)$$

Zobrazení $\tau_m \circ \tau_a^{-1}$ je tedy homomorfismem \mathcal{G}_d do \mathcal{G}_m , a protože je zároveň bijekcí, je izomorfismem.

Z definice matice \underline{M} vyplývá, že ▲

$$(\forall A_o \in R^1)(\forall \Phi \in R^1)(\underline{M}(A_o/S, \Phi) = \underline{M}(A_o/S, 0)\underline{M}(0, \Phi)). \quad (3.3-9)$$

Označíme-li

$$\mathcal{M}_o := \{ \underline{M}(A_o/S, 0) \mid A_o/S \in R^1 \}, \quad (3.3-10)$$

$$\mathcal{M}_n := \{ \underline{M}(0, \Phi) \mid \Phi \in R^1 \}, \quad (3.3-11)$$

snadno ukážeme, že struktury

$$\mathcal{G}_{m_o} := \langle \mathcal{M}_o, \times \rangle \quad (3.3-12)$$

$$\mathcal{G}_{m_n} := \langle \mathcal{M}_n, \times \rangle \quad (3.3-13)$$

jsou komutativními grupami, jejichž jediným společným prvkem $\underline{M}(0,0)$ je jednotková matice. Struktura \mathcal{G}_m je tedy izomorfní s direktním součinem grup \mathcal{G}_{m_o} a \mathcal{G}_{m_n} , které jsou izomorfní s grupami \mathcal{G}_o a \mathcal{G}_n . Maticová struktura \mathcal{G}_m je tedy dalším modelem neurčitých dat.

K otázce o jedinečnosti tohoto modelu se vrátíme později. Zde si povšimneme dvojí symetrie matice $\underline{M}(A_o/S, \Phi)$ (3.3-2), ta má důležitý důsledek. Je-li

$$\underline{T} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3-14)$$

pak platí

$$(\forall \underline{M} \in \mathcal{G}_m)(\underline{T}\underline{M} = \underline{M}\underline{T}). \quad (3.3-15)$$

3.4 Párová čísla

Analýza prvního axiому nás přivedla k maticovému modelu dat, v němž jsou data reprezentována čtvercovými maticemi specifického tvaru. Tyto matice jsou symetrické vzhledem k oběma diagonálám, a jsou tudíž plně určeny dvojicí svých nestejných prvků. To platí i pro jejich součiny. Lze se tedy vrátit k dvojicové reprezentaci dat, ale v jiných souřadnicích. Dvojicový zápis odstraní redundanci maticového zápisu a navíc umožní modelovat nejen kvantifikační, ale i estimační proces jednotným a zhuštěným způsobem.

Násobení matic zmíněného speciálního typu poněkud připomíná operaci násobení komplexních čísel. To nás přivádí k myšlence využít algebru, která by byla obdobou algebry komplexních čísel. Taková čísla, nazývaná dvojitými, se v matematice vyskytují dávno. V [8] se uvádí, že se jimi zabýval již anglický matematik W.K.Clifford (1845-1879). V [8] je hlavní pozornost věnována geometrickým a fyzikálním interpretacím dvojitých čísel, včetně axiomatiky s nimi spjaté geometrie roviny Minkowského. Důležité algebraické vlastnosti dvojitých čísel a analytické vlastnosti dvojitých funkcí dvojitého argumentu jsou uvedeny v [9]. Dnešní obecnější algebraický přístup [10] nám umožní zavést jediný výraz pro dvojitá i komplexní čísla a použít ho k výkladu jejich společných i rozdílných vlastností podle potřeb gnostické teorie neurčitých dat.

3.4.1 Algebraické vlastnosti párových čísel

Definice 3: Budiž $R[c]$ okruh všech polynomů nad tělesem reálných čísel R^1 v jedné neurčité (c): Budiž $C^2 \in R^1$. Na $R[c]$ zaveďme kongruenci (\sim)

$$(\forall \underline{u}, \underline{v} \in R[c]) ((\underline{u} \sim \underline{v}) \Leftrightarrow ((\exists \underline{w} \in R[c]) (\underline{u} - \underline{v} = \underline{w}(c^2 - c^2)))). \quad (3.4.1-1)$$

Podílový okruh

$$U_C := R[c] \text{ modulo } (c^2 - c^2) \quad (3.4.1-2)$$

nazveme OKRUHEM PÁROVÝCH ČÍSEL TYPU C .

Prvky okruhu U_C reprezentované $\underline{u}, \underline{v}$ budeme značit u, v .

Pro každé přirozené číslo k tedy platí

$$\underline{c}^{2k} \sim \underline{c}^{2k} \quad \underline{c}^{2k+1} \sim \underline{c}^{2k} \underline{c}. \quad (3.4.1-3)$$

Každou třídu $u \in U_C$ lze proto reprezentovat dvoučlenem

$$u := a + bc, \quad (3.4.1-4)$$

(kde $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2$), což budeme zapisovat také jako

$$u := Pr(u) + \mathcal{E}(u)c. \quad (3.4.1-5)$$

Lze dokázat [10], že dvojice $\langle a, b \rangle$ je určena jednoznačně a že součet a součin dvou prvků $u_1 = a_1 + b_1 c$ a $u_2 = a_2 + b_2 c$ okruhu U_C mají tvar

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)c \quad (3.4.1-6)$$

$$u_1 u_2 = (a_1 a_2 + C^2 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)c. \quad (3.4.1-7)$$

Z konstrukce plyne, že součty i součiny jsou asociativní i komutativní a že každý z okruhů U_C je vůči těmto operacím uzavřen.

Reálná čísla kanonicky vnořená do $\mathbb{R}[c]$ jsou vnořena i do U_C .

Proto lze okruh U_C chápat jako komutativní a asociativní 2-algebru (algebru dimenze 2) nad tělesem reálných čísel s jednotkou

$$u_0 := 1 + 0c. \quad (3.4.1-8)$$

Mají-li nějaká nenulová C^2 a C'^2 stejná znaménka, jsou algebry U_C a $U_{C'}$ izomorfní. Degenerovaný případ $C^2 = 0$ vylučujeme.

Proto uvažujeme pouze dva případy

$$C^2 = 1 \quad \text{a} \quad C^2 = -1, \quad (3.4.1-9)$$

tedy

$$C \in \{J, I\}, \quad (3.4.1-10)$$

kde J s ohledem na jednotu značení symbolizuje reálnou jedničku a I imaginární jednotku komplexních čísel. Neurčitou budeme v prvním případě značit symbolem j a příslušný okruh symbolem U_J , ve druhém případě použijeme symboly i a U_I . Pokud se budou studovat současně oba případy, budeme používat symboly c, C , pro okruh U_C , $C \in \{J, I\}$.

Definice 4: Třídý $a+bj \in U_J$ nazveme DVOJITÝMI ČÍSLY a třídý $a+bi \in U_I$ nazveme KOMPLEXNÍMI ČÍSLY.

PÁROVÝMI ČÍSLY budeme nazývat třídý $a+bc \in U_C$, $C \in \{J, I\}$.

Budiž $C \in \{J, I\}$, $u = a+bc \in U_C$. Párové číslo \bar{u} definované vztahem

$$\bar{u} = Sd(u) := a - bc \quad (3.4.1-11)$$

nazveme párovým číslem SDRUŽENÝM s u a párové číslo $Tr(u)$,

$$Tr(u) := b + ac, \quad (3.4.1-12)$$

nazveme TRANSPONOVANÝM párovým číslem u . Nezáporné reálné nebo ryze imaginární číslo $|u|_C$ s nezápornou imaginární částí, pro nějž platí

$$|u|_C^2 := a^2 - b^2 C^2, \quad (3.4.1-13)$$

nazveme MODULEM párového čísla u .

Reálná čísla $Pr(u)$ a $Se(u)$ budeme nazývat SLOŽKAMI párového čísla u .

Dělení (a multiplikativní inverzi) dvou párových čísel

$$u_k = a_k + b_k c \quad (u_k \in U_C, k=1,2) \quad (3.4.1-14)$$

z téhož podílového okruhu zavádíme při $|u_2|_C \neq 0$ vztahem

$$u_1/u_2 = u_1 \bar{u}_2 / |u_2|_C^2. \quad (3.4.1-15)$$

V souladu s (3.4.1-4) zavedeme bijekce $\beta_C: R^2 \rightarrow U_C$ a $\gamma: U_J \rightarrow U_I$ takové, že

$$\beta_C: \langle a, b \rangle \mapsto a + bc, \quad \gamma: a + bj \mapsto a + bi. \quad (3.4.1-16)$$

Bijekce γ zachovává sčítání a násobení skalárem, nikoliv však násobení párových čísel:

$$(\forall u_1, u_2 \in U_J) (\gamma(u_1 u_2) = \gamma(u_1) \gamma(u_2) \Leftrightarrow (\exists k \in \{1, 2\}) (\exists a \in R^1) (u_k = a + 0j).$$

Podstatnou odlišností U_J od U_I je, že na rozdíl od okruhu U_I nemajícího dělitele nuly, obsahuje U_J nenulový ideál s prvky $b+bj$ a $b-bj$ ($b \in R^1$). Tyto prvky mají nulový modul.

Povšimněme si, že sčítání dvojitých čísel s komplexními není zavedeno. Nebude se používat. Sečítají-li se v dalším párová čísla, jsou všechna buď v U_J nebo v U_I . Obdobně je tomu i s ostatními operacemi na párových číslech.

Z (3.4.1-6) až (3.4.1-8) a (3.4.1-11) vyplývá, že operace sdružování párových čísel vyhovuje pro $C=J, I$ podmínkám

$$(\forall u \in U_C)(\overline{\overline{u}}=u), \quad (3.4.1-17)$$

$$(\forall u, u' \in U_C)(\overline{(\overline{u}+\overline{u'})}=\overline{u}+\overline{u'}), \quad (3.4.1-18)$$

$$(\forall u, u' \in U_C)(\overline{(\overline{u}\overline{u'})}=(\overline{u'}) (\overline{u})), \quad (3.4.1-19)$$

$$(u \in U_C)((\overline{u}=u) \Leftrightarrow ((\exists c \in \mathbb{R}^1)(u = u_0 = c + 0c)(u_0 \in U_C))), \quad (3.4.1-20)$$

$$(\forall u \in U_C)(u\overline{u} = (a^2 - b^2 C^2)u_0 = Q(a, b)u_0). \quad (3.4.1-21)$$

Ocitujme nyní větu, která je uvedena v [9] jako rozšíření Frobeniovy věty o algebře komplexních čísel:

Věta 2: Struktury dvojitých a komplexních čísel jsou jedinými 2-

algebry s jednotkou a s unární operací sdružování vyhovující podmínkám (3.4.1-17)-(3.4.1-21), pro které je $Q(a, b)$ v (3.4.1-21) nedegenerovanou kvadratickou formou.

Je známo, že existence dvojice algeber zmíněného typu je spjata s existencí dvou význačných geometrií roviny, Eukleidovy a pseudoekleidovské (Minkowského) geometrie. Izomorfismus Minkowského roviny s algebrou dvojitých čísel a Eukleidovy roviny s algebrou komplexních čísel hraje v gnostické teorii významnou úlohu. Proto se pokusíme do těchto vztahů nahlédnout hlouběji.

3.4.2 Geometrizační párových čísel

Algebra U_C je tedy i lineárním prostorem izomorfním s \mathbb{R}^2 . Zavečme zde geometrii pomocí skalárního součinu.

Definice 5: Označme $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2$) prvky diagonální matice

$$g_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -C^2 \end{pmatrix} \quad (3.4.2-1)$$

a $\langle u^1, u^2 \rangle, \langle v^1, v^2 \rangle \in \mathbb{R}^2$ složky dvou párových čísel $u, v \in U_C$.

METRICKOU ROVINOU nazveme algebru U_C , na níž je definován

SKALÁRNÍ SOUČIN

$$(u, v)_C = u^1 v^1 - C^2 u^2 v^2 = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (u, v \in U_C) (C=J, I), \quad (3.4.2-2)$$

kde poslední výraz představuje Einsteinův zápis [11]. Horní indexy složek budeme od exponentů rozlišovat dle kontextu.

Budiž t zobrazení

$$(t: U_C \rightarrow U_C) (C=J, I). \quad (3.4.2-3)$$

Řekneme, že skalární součin je INVARIANTNÍ k transformaci t , jestliže

$$(\forall u, v \in U_C) ((t(u), t(v))_C = (u, v)_C) (C=J, I). \quad (3.4.2-4)$$

Budiž \mathcal{L} množina lineárních zobrazení $L: U_C \rightarrow U_C$ tvaru

$$v'^\alpha = L_\beta^\alpha v^\beta \quad (\alpha, \beta=1, 2) (v^\beta, v'^\alpha \in \mathbb{R}^1), \quad (3.4.2-5)$$

kde čísla L_β^α ($\alpha, \beta=1, 2$) vyhovují podmínkám

$$L_\gamma^\alpha L_\delta^\beta g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}. \quad (3.4.2-6)$$

Prostředky diferenciální geometrie lze dokázat [12], že podmínce invariance skalárního součinu při konstantních prvcích matice g_C

vyhovují mezi všemi dvakrát diferencovatelnými funkcemi pouze funkce lineární. Takové tvrzení lze však zesílit dle [13]:

Věta 3 (Šindelář):

Mezi všemi funkcemi $t: U_C \rightarrow U_C$ podmínce invariance skalárního součinu (3.4.2-4) vyhovují lineární funkce L z množiny \mathcal{L} , a pouze tyto funkce.

Důkaz: Budiž $u, v \in U_C$ a $u' = L(u), v' = L(v)$.

Dosaďme (3.4.2-5) do (3.4.2-2):

$$(u', v')_C = g_{\alpha\beta} u'^\alpha v'^\beta = g_{\alpha\beta} L_\gamma^\alpha L_\delta^\beta u^\gamma v^\delta, \quad (3.4.2-7)$$

odkud po dosazení podmínky (3.4.2-6) plyne

$$(u', v')_C = g_{\gamma\delta} u^\gamma v^\delta = (u, v)_C, \quad (3.4.2-8)$$

takže skalární součin je invariantní ke každé funkci $L \in \mathcal{L}$.

Nechť nyní platí (3.4.2-4). Funkci t zapíšeme jako dvojici funkcí, řádkový vektor:

$$(\forall w \in U_C) (\underline{t}(w) := (t_1(w), t_2(w))). \quad (3.4.2-9)$$

Pro všechna $u_1, u_2 \in U_C$ budiž $\underline{b}(u_1, u_2)$ matice

$$\underline{b}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} t_1(u_1) & t_1(u_2) \\ -C^2 t_2(u_1) & -C^2 t_2(u_2) \end{pmatrix}. \quad (3.4.2-10)$$

Z podmínky invariance pro každé $m \in \{1, 2\}$ plyne (3.4.2-11)
 $(\forall w \in U_C)(\forall u_m \in U_C) \quad t_1(w)t_1(u_m) - C^2 t_2(w)t_2(u_m) = w^1 u_m^1 - C^2 w^2 u_m^2,$

neboli

$$(\forall w, u_1, u_2 \in U_C) ((t_1(w), t_2(w)) \times \underline{b}(u_1, u_2) = (w^1, w^2) \times \underline{n}(u_1, u_2)), \quad (3.4.2-12)$$

kde \times značí maticové násobení a kde \underline{n} je matice

$$\underline{n}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ -C^2 u_1^2 & -C^2 u_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.4.2-13)$$

Vyberme

$$(u' \in U_C)(u'^1 u'^2 \neq 0).$$

Pak je matice $\underline{n}' := \underline{n}(u', \bar{u}')$ regulární a s použitím (3.4.2-12)

dostáváme pro $\underline{b}' := \underline{b}(u', \bar{u}')$ vztah

$$\{(w^1, w^2) \times \underline{n}' \mid w \in U_C\} = \{(t_1(w), t_2(w)) \times \underline{b}' \mid w \in U_C\} = \mathbb{R}^2, \quad (3.4.2-15)$$

takže \underline{b}' je regulární matice. Proto dle (3.4.2-12) platí

$$(\forall w \in U_C) ((t_1(w), t_2(w)) = (w^1, w^2) \times \underline{n}' \times (\underline{b}')^{-1}), \quad (3.4.2-16)$$

kde matice $\underline{n}'(\underline{b}')^{-1}$ je regulární. Funkce t je tedy lineární.

Navíc $t(0+0c) = 0+0c$. Snadno lze ukázat, že pokud lineární funkce L splňuje $L(0+0c) = 0+0c$ a skalární součin je invariantní k L , pak $L \in \mathcal{L}$. ▲

V dalším textu je účelné omezit se na taková zobrazení $L \in \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$,

pro něž platí znaménkové konvence

$$(L_1^1)^2 - (L_2^1)^2 > 0, \quad L_1^1 > 0 \quad \text{a} \quad L_2^2 > 0. \quad (3.4.2-17)$$

Transformace tohoto typu pro případ $C=J$ se obvykle [12] nazývají LORENTZOVY (dvourozměrné, homogenní a pozitivní) transformace. Při $C=I$ jsou to obvyklé eukleidovské ortonormální transformace.

Mezi všemi funkcemi z U_C do U_C ($C \in \{J, I\}$) tedy existují pouze lineární funkce speciálního typu, které zachovávají skalární součin (každý typ funkce "svůj" skalární součin) v celém prostoru. Tento prostor jsme ztotožnili s metrickou rovinou, proto lze skalární součin $(u, u)_C$ interpretovat jako čtverec vzdálenosti bodu (u^1, u^2) od bodu $(0, 0)$, a to v Eukleidově geometrii ($C=I$), nebo v geometrii roviny Minkowského ($C=J$). Srovnáním (3.4.2-2) s (3.4.1-13) zjišťujeme, že tato vzdálenost je rovna modulu $|u|_C$ příslušného párového čísla a může být jak reálná, tak i imaginární. Právě jsme dokázali, že transformace $L \in \mathcal{L}$ tuto vzdálenost nemění. Proto je nazveme OTÁČENÍM.

Paralelou ke vztahům (3.4.2-7) a (3.4.2-8) v řeči párových čísel je následující důsledek, v němž role operátorů L přejímají párová čísla speciálního typu.

Důsledek 3.1: Budiž pro $C \in \{J, I\}$

$$\mathcal{O}_C := \left\{ o \in U_C \mid o = f + hc, f, h \in \mathbb{R}^1, f > |h|, f^2 - h^2 C^2 = 1 \right\}. \quad (3.4.2-18)$$

Pak platí, že ke každému $o \in \mathcal{O}_C$ existuje $L \in \mathcal{L}_1$ a ke každému $L \in \mathcal{L}_1$ existuje $o \in \mathcal{O}_C$ tak, že

$$(\forall v \in U_C) (ov = L_1^1 v^1 + C^2 L_1^2 v^2 + (L_1^2 v^1 + L_1^1 v^2)c). \quad (3.4.2-19)$$

Důkaz: Nechť je dána transformace $L \in \mathcal{L}_1$. Pak lze podmínku (3.4.

2-6) přepsat jako soustavu rovnic

$$(L_1^1)^2 - (L_1^2)^2 C^2 = 1, \quad (3.4.2-20)$$

$$(L_2^1)^2 - (L_2^2)^2 C^2 = -C^2, \quad (3.4.2-21)$$

$$L_1^1 L_2^1 - L_2^2 L_1^2 C^2 = 0, \quad (3.4.2-22)$$

která spolu se znaménkovou konvencí (3.4.2-17) dává

$$L_1^1 = L_2^2, \quad L_2^1 = C^2 L_1^2. \quad (3.4.2-23)$$

Navíc - opět dle podmínky (3.4.2-17) - platí $L_1^1 > |L_1^2|$. Párové číslo $L_1^1 + L_1^2 c$ je tedy prvkem množiny \mathcal{O}_C . Zobrazení (3.4.2-5)

má proto tvar

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 c^2 \\ L_1^2 & L_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad (3.4.2-24)$$

neboli

$$v^1 + v^2 c = (L_1^1 + L_1^2 c)(v^1 + v^2 c), \quad (3.4.2-25)$$

takže platí (3.4.2-19). Je-li dán naopak $o = f + hc \in \mathcal{O}_C$, pak přiřazením

$$L_1^1 = L_2^2 = f, \quad L_1^2 = h, \quad L_2^1 = hc^2 \quad (3.4.2-26)$$

vyhovíme podmínkám (3.4.2-20) - (3.4.2-22), tedy $L \in \mathcal{L}$. Protože $f > |h|$, platí i (3.4.2-17) a $L \in \mathcal{L}_1$. Součin (3.4.2-19) zapsaný jako (3.4.2-25) a (3.4.2-24) je pak ekvivalentní s (3.4.2-5). \blacktriangle

V dalším bude užitečný i jiný, exponenciální tvar dvojitého čísel reprezentujících operátory otáčení. Ze známých vlastností hyperbolických funkcí reálného a imaginárního argumentu vyplývají vztahy platné pro všechna $\Omega_C \in \mathbb{R}^1$, $C \in \{J, I\}$:

$$\sinh(C\Omega_C) = \sum_{m=0}^{\infty} (C\Omega_C)^{2m+1} / (2m+1)!, \quad (3.4.2-27)$$

$$\cosh(C\Omega_C) = \sqrt{1 + C^2 \sinh^2(C\Omega_C)}. \quad (3.4.2-28)$$

Definice 6: Ke každému $\Omega_J \in \mathbb{R}^1$ přiřadíme dvojité číslo $\exp(j\Omega_J)$,

$$\exp(j\Omega_J) := \cosh(\Omega_J) + \sinh(\Omega_J)j, \quad (3.4.2-29)$$

a komplexní číslo $\exp(i\Omega_I)$,

$$\exp(i\Omega_I) := \cos(\Omega_I) + \sin(\Omega_I)i. \quad (3.4.2-30)$$

V tvrzeních pokrývajících oba případy párových čísel budeme používat párové číslo $\exp(c\Omega_C)$:

$$\exp(c\Omega_C) := \cosh(C\Omega_C) + C^{-1} \sinh(C\Omega_C)c. \quad (3.4.2-31)$$

Párová čísla $\exp(c\Omega_C)$ budeme nazývat OPERÁTORY OTÁČENÍ O ÚHEL Ω_C .

Lemma 2: Platí

$$\mathcal{O}_J = \{ \exp(j\Omega_J) \mid \Omega_J \in \mathbb{R}^1 \}, \quad \mathcal{O}_I = \{ \exp(i\Omega_I) \mid \Omega_I \in (-\pi/4, \pi/4) \}. \quad (3.4.2-18')$$

Navíc pro každé $o = f + hc \in \mathcal{O}_C$ platí $o = \exp(c\Omega_C)$, kde

$$\Omega_C = C^{-1} \operatorname{arctanh}(Ch/f). \quad (3.4.2-32)$$

Důkaz: Složky každého operátoru otáčení $\exp(c\Omega_C) \in U_C$ pro $C=J, I$ vyhovují definici (3.4.2-18) díky (3.4.2-27) a (3.4.2-28). Ke každému $o=f+hc \in \mathcal{O}_C$ je přiřazen vztahem (3.4.2-32) právě jeden úhel Ω_C a operátor $\exp(c\Omega_C)$. A

Definice 7: Budiž $k \in \mathbb{R}_+$ libovolné. Zobrazení $K_k: U_C \rightarrow U_C$, určené předpisem $(\forall u \in U_C)(K_k(u)=ku)$ nazveme KONTRAKCÍ. Označme dále $\mathcal{K} := \{K_k \mid k \in \mathbb{R}_+\}$.

Nechť dále značí

$${}_0U_C := \{u \in U_C \mid u=a+bc, a, b \in \mathbb{R}^1, |a|=|b|\}, \quad (3.4.2-33)$$

$${}_1U_C := \{u \in U_C \mid \text{Pr}(u) > |\text{Se}(u)|\}, \quad (3.4.2-34)$$

$${}_2U_C := \{u \in U_C \mid |\text{Pr}(u)| < \text{Se}(u)\}, \quad (3.4.2-35)$$

$${}_3U_C := \{u \in U_C \mid -\text{Pr}(u) > |\text{Se}(u)|\}, \quad (3.4.2-36)$$

$${}_4U_C := \{u \in U_C \mid |\text{Pr}(u)| < -\text{Se}(u)\}. \quad (3.4.2-37)$$

Párové číslo $u \in {}_mU_C$ nazveme párovým číslem m -tého DRUHU.

Je zřejmé, že množina \mathcal{K} spolu s operací skládání zobrazení je grupou a že operace kontrakce komutuje s otáčením, sdružováním i transponováním párových čísel a mění pouze modul. Povšimněme si, že dle (3.4.2-32) je každý operátor otáčení párovým číslem prvního druhu a že dle (3.4.2-30) je úhel komplexního čísla Ω_I svázán s úhlem Ω_J měřeným v geometrii Minkowského funkčním vztahem. Proto úhel Ω_I nabývá hodnot pouze z otevřeného intervalu $(-\pi/4, \pi/4)$, zatímco úhel Ω_J probíhá interval $(-\infty, +\infty)$. Párová čísla jsou tedy otáčena jen uvnitř otevřené čtvrtroviny. To je důležitý rozdíl oproti obvyklému zavedení úhlu komplexního čísla. Je nutný pro další výklad, kde je každý bod reálné roviny interpretován vždy dvakrát, jednak dvojitým číslem a jednak číslem komplexním.

Množina ${}_0U_C$ párových čísel ztotožňovaných s body na obou diagonálách reálné roviny obsahuje všechny dělitele nuly okruhu dvojitých čísel a z definice je patrné, že její průnik s každou z os

tatních množin je prázdný. Protože definicemi pěti druhů párových čísel jsou pokryty všechny případy, platí

$${}_{0}U_C \cup {}_{1}U_C \cup {}_{2}U_C \cup {}_{3}U_C \cup {}_{4}U_C = U_C, \quad (3.4.2-38)$$

Definice párových čísel různých druhů je ilustrována obr.1.

Věta 4: Budiž $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. Definujme jednotkové dvojité číslo

${}_m e \in {}_m U_J$ m -tého druhu vztahem

$${}_m c = \sin(m\pi/2) - \cos(m\pi/2)j, \quad (3.4.2-39)$$

Pak platí, že dvojité číslo ${}_m e$ může být vytvořeno z ${}_1 e$ operacemi transpozice a sdružování. Dále pro všechna $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $u \in {}_m U_J$ platí rozklad

$$u = a + bj = ({}_m e)(k \cosh(\Phi) + k \sinh(\Phi)j), \quad (3.4.2-40)$$

kde

$$k = \|u\|_J, \quad \Phi = (1/2) \operatorname{arcsinh}(2ab/(k^2)). \quad (3.4.2-41)$$

Důkaz: Mějme dvojité číslo $u \in U_J \setminus {}_0 U_J$, $u = a + bc$. To má nenulový mo-

dul, jinak by patřilo do ${}_0 U_J$. Proto je $a^2 - b^2 J^2 \neq 0$ a mezi složkami a, b platí některá ze čtyř relací v (3.4.2-34)-(3.4.2-37) určujících druh m . Známe tedy ${}_m e$ a hledáme k a Φ , vyhovující identitě (3.4.2-40). Srovnání složek dvojitých čísel vede k podmínkám

$$a = k \sin(m\pi/2) \cosh(\Phi) - k \cos(m\pi/2) \sinh(\Phi), \quad (3.4.2-42)$$

$$b = k \sin(m\pi/2) \sinh(\Phi) - k \cos(m\pi/2) \cosh(\Phi),$$

neboť $j^2 = 1$. Protože $\sin(m\pi/2) \cos(m\pi/2) = 0$ pro celá m , dostáváme

$$k^2 = (a^2 - b^2) / (-\cos(m\pi)), \quad (3.4.2-43)$$

kde pravá strana je kladná pro všechna $m=1, \dots, 4$, neboť znaménka čitatele a jmenovatele se shodují. Je tedy $k^2 = (\|u\|_J)^2$.

Pro součin složek pak dostáváme rovnici

$$ab = k^2 \cosh(\Phi) \sinh(\Phi), \quad (3.4.2-44)$$

jejímž jediným řešením je Φ dle (3.4.2-41). Znaménko úhlu Φ se dle (3.4.2-44) shoduje se znaménkem součinu ab . Proto se do-

sazením $m=1,2,3,4$ do (3.4.2-42) a užitím definic (3.4.2-34) - (3.4.2-37) lze přesvědčit, že $k>0$ ve všech uvažovaných případech. Dle (3.4.1-11), (3.4.1-12) a (3.4.2-39) platí rovnosti

$${}_2e = 0+1j = \text{Tp}(1+0j) = \text{Tp}({}_1e), \quad (3.4.2-45)$$

$${}_4e = 0-1j = \text{Sd}(0+1j) = \text{Sd}({}_2e) = \text{Sd}(\text{Tp}({}_1e)). \quad (3.4.2-46)$$

$${}_3e = -1+0j = \text{Tp}({}_4e) = \text{Tp}(\text{Sd}(\text{Tp}({}_1e))). \quad (3.4.2-47)$$

Z jednotkového dvojitého čísla lze tedy operacemi kontrakce, otáčení, sdružování a transpozice vytvořit kterékoliv dvojitě číslo s nenulovým modulem.

Na obr.1 je ilustrováno vytváření osmice dvojitých čísel z jednoho výchozího dvojitého čísla použitím operací transpozice a sdružování. V předchozím jsme již ztotožnili body každé z obou metrických rovin s prvky příslušné množiny párových čísel U_C .

Vztah (3.4.2-38) můžeme proto geometricky interpretovat jako rozklad obou rovin na dvě diagonální přímky a čtyři otevřené čtvrtroviny mezi těmito diagonálami. Průsečík diagonál (počátek souřadnic) odpovídá nulovému párovému číslu, body na diagonálách netriviálním dělitelům nuly okruhu dvojitých čísel a body čtvrtrovin ostatním párovým číslům.

Důsledek 4.1: Budiž $m \in \{1,2,3,4\}$. Pro všechna $u = a + bj \in {}_m U_J$ platí

$$u = {}_m e \sqrt{|a^2 - b^2|} \exp(j\Phi), \quad (3.4.2-48)$$

kde Φ je určeno z (3.4.2-41).

Úhel $\Omega_J = \Phi$ dvojitého čísla $u \in U_J \setminus {}_C U_J$ určený dle (3.4.2-41) budeme nazývat ARGUMENTEM tohoto čísla a značit $\Omega_J = \arg_J(u)$.

Bijekce \mathcal{J} (3.4.1-16) indukuje důležité vztahy mezi úhly dvojitých a komplexních čísel $a + bj$ a $a + bi$. Uvažujme nejprve $a + bc \in {}_1 U_C$. Komplexní číslo má zde v polárních souřadnicích obvyklý tvar

$$\mathcal{J}(a + bj) = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \exp(i\Omega_I),$$

jeho vzor je dle důsledku 4.1 roven $a + bj = \sqrt{a^2 - b^2} \exp(j\Omega_J)$. Porovnáním s (3.4.2-29) a (3.4.2-30) vyplývá vztah mezi úhly Ω_J a Ω_I :

$$\tan(\Omega_I) = \tanh(\Omega_J). \quad (3.4.2-49)$$

Pro účely gnostické teorie je vhodné zachovat toto přiřazení úhlů i pro párová čísla ostatních druhů. Budiž tedy $u = a + bj \in U_J \setminus_0 U_J$ a $\Omega_J = \arg_J(u)$. Pak číslo $\Omega_I \in (-\pi/4, \pi/4)$, určené vztahem (3.4.2-49), nazveme ARGUMENTEM komplexního čísla $\zeta(u) = a + bi$ a označíme symbolem $\arg_I(\zeta(u))$. Pro každé $u \in U_C \setminus_0 U_C$ tedy platí $\Omega_C = \arg_C(u)$.

Důsledek 4.2: Budiž $u = a + bj \in U_J \setminus_0 U_J$ dvojitě číslo. Budiž $k = ||u||_J$.

Označme

$$\Phi := \Omega_J = \arg_J(u) \quad \Psi := \Omega_I = \arg_I(\zeta(u)). \quad (3.4.2-50)$$

Pak platí

$$\tanh(\Phi) = \tan(\Psi), \quad (3.4.2-51)$$

$$2ab/k^2 = \sinh(2\Phi) = \tan(2\Psi), \quad (3.4.2-52)$$

$$2ab/(a^2 + b^2) = \sin(2\Psi) = \tanh(2\Phi), \quad (3.4.2-53)$$

$$(a^2 + b^2/k^2) = \cosh(2\Phi) = 1/\cos(2\Psi). \quad (3.4.2-54)$$

Důkaz: Vztah (3.4.2-51) je ekvivalentní s (3.4.2-49), jehož

platnost jsme rozšířili na párová čísla všech druhů ($m=1, 2, 3, 4$). První vztah v (3.4.2-52) je přepisem vztahu (3.4.2-44), druhý z něj odvodíme užitím (3.4.2-51) a vztahů mezi standardními funkcemi. Vztahy (3.4.2-53)-(3.4.2-54) jsou pak důsledky vztahu (3.4.2-52). ▲

Důsledek 4.3: Budiž $u \in U_C \setminus_0 U_C$, $u = a + bc$, párové číslo s argumentem rovným Ω_C . Pak

$$\cosh(2C\Omega_C) = |a^2 + b^2c^2| / |a^2 - b^2c^2|, \quad (3.4.2-55)$$

$$\sinh(2C\Omega_C) = 2abc / |a^2 - b^2c^2|. \quad (3.4.2-56)$$

Důsledek 4.4: Budiž $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pak platí

$$(\forall u, v \in_m U_J)(uv \in_1 U_J)(u/v \in_1 U_J), \quad (3.4.2-57)$$

$$(\forall u \in_m U_J)(\forall v \in_1 U_J)(uv \in_m U_J)(u/v \in_m U_J). \quad (3.4.2-58)$$

Důkaz: Druh součinu (podílu) dvojitých čísel je určen podle důsledku 4.1 součinem (podílem) jednotkových párových čísel. Pro ten dostáváme z (3.4.2-39)

$$e_m e_n = \cos((m-n)\pi/2) - \sin((m+n)\pi/2)j, \quad (3.4.2-60)$$

odkud vyplývají uvedené vztahy.

Protože operátor otáčení je párovým číslem prvního druhu, nemůže být podle (3.4.2-58) otáčením změněn druh párového čísla a otáčení nepřevéde představující bod přes diagonálu roviny. V Minkowského rovině lze přechod přes diagonálu interpretovat pouze jako zrcadlení [11]. My jsme k tomu použili jednak transpozici (zrcadlo na diagonále) a jednak sdružování (zrcadlo na ose $Pr(u)$, viz obr.1). Tato dvě zrcadlení mají v gnostické teorii velký význam. V dalším uvidíme, že existuje i další "přechod přes diagonálu", a to derivováním párových funkcí.

Zavedené pojmy umožnily přecházet od kartézských souřadnic bodů $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, zobrazených párovými čísly $u=a+bc$, k polárním souřadnicím $(|u|_C, \Omega_C)$:

Důsledek 4.5: Nechť pro $u=a+bc \in U_C \setminus 0U_C$ je $\Omega_C = \arg_C(u)$ a platí

$$r_C := |u|_C = \sqrt{a^2 - b^2_C^2}. \quad (3.4.2-61)$$

Pak

$$u = r_C \exp(c\Omega_C). \quad (3.4.2-62)$$

Důkaz: Nechť $C=J$ a $m \in \{1,2,3,4\}$. Pro všechna $a+bj \in U_J \setminus 0U_J$ plyne z (3.4.2-39) a ze vztahů (3.4.2-34) až (3.4.2-37)

$$r_J = \sqrt{a^2 - b^2} = e_m \sqrt{|a^2 - b^2|},$$

proto dle (3.4.2-48) platí $u = r_J \exp(j\Omega_J)$. O platnosti (3.4.2-62) pro komplexní čísla se lze přesvědčit užitím (3.4.2-49). ▲

3.5 Analytické vlastnosti párových funkcí

Až dosud jsme párová čísla chápali jako reprezentace dvojic reálných čísel, např. konstant. Nyní přejdeme k PÁROVÝM PROMĚNÝM, což budou dvojice reálných proměnných uspořádaných do tvaru párového čísla. Pod PÁROVOU FUNKCÍ budeme rozumět parciální

zobrazení $\mathbb{R}^1 \rightarrow {}_1U_C$ nebo ${}_1U_C \rightarrow {}_1U_C$. V prvním případě budeme hovořit o párové funkci skalárního argumentu, ve druhém o párové funkci párového argumentu. Jako dosud budeme rozeznávat dva případy, $C=J$ (dvojitá funkce, dvojitá proměnné), a $C=I$ (komplexní funkce, komplexní proměnné, avšak v neobvyklém pojetí dle definice 4).

Definice 8: Buďte $C \in \{J, I\}$ a w párová funkce párového argumentu,

$$(w: {}_1U_C \rightarrow {}_1U_C)(x+yc \rightarrow x'+y'c). \quad (3.5-1)$$

Pokud existují spojité první derivace funkcí x' a y' podle x a y , řekneme, že w je TŘÍDY $C_1({}_1U_C)$. Platí-li navíc

$$(\forall x+yc \in {}_1U_C) \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = c^2 \frac{\partial y'}{\partial x}, \quad (3.5-2)$$

řekneme, že funkce w je ANALYTICKÁ.

Nechť pro všechna $x+yc \in {}_1U_C$ existuje JACOBOVA matice

$$\underline{J}(w(x,y)) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3.5-3)$$

Buďte

$$\underline{T}_C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \underline{t} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5-4)$$

Řekneme, že Jacobiova matice funkce w KOMUTUJE S TRANSPOZICÍ, platí-li pro všechna $x+yc \in {}_1U_C$ vztah

$$\underline{t} \underline{T}_C \underline{J}(w(x,y)) \underline{T}_C^{-1} \underline{t} = \underline{T}_C \underline{J}(w(x,y)) \underline{T}_C^{-1}. \quad (3.5-5)$$

Řekneme, že funkce w ZACHOVÁVÁ NULU, jestliže platí

$$w(0+0c) = 0+0c. \quad (3.5-6)$$

Řekneme, že funkce w MÁ KONSTANTNÍ JAKOBIÁN, je-li třídy $C_1({}_1U_C)$, a platí-li

$$(\exists K \in \mathbb{R}_+) (\forall x+yc \in {}_1U_C) (\text{Det}(\underline{J}(w(x,y))) = K), \quad (3.5-7)$$

kde $\text{Det}(\cdot)$ značí determinant matice.

Věta 5: Budiž w funkce (3.5-1). Pak platí, že w je analytická, právě když je třídy $C_1({}_1U_C)$, a její Jacobiova matice komutuje s transpozicí.

Důkaz: Nechť je w analytická. Pak existuje Jacobiova matice (3.5-3) a obě strany v (3.5-5) mají smysl. Užitím (3.5-2) se přesvědčíme, že (3.5-5) platí pro každé $x+yc \in {}_1U_C$. Funkce w je tedy třídy $C_1({}_1U_C)$ a její Jacobiova matice komutuje s transpozicí. Je-li $w \in C_1({}_1U_C)$ a platí-li (3.5-5) pro všechna $x+yc \in {}_1U_C$, pak vynásobením matic dostaneme (3.5-2). Funkce w je tedy analytická. ▲

Pro případ $C=I$ je z komplexní analýzy známo, že analytické funkce mohou být rozloženy do mocninné řady komplexního argumentu. V případě dvojitých funkcí dvojitého argumentu to platí také [9]. Právě jsme se přesvědčili, že analytičnost dvojitě funkce dvojitého argumentu má elementární geometrickou interpretaci: obraz její derivace podle reálného parametru v bodě $u \in {}_1U_J$, pozorovaný v zrcadle umístěném na diagonále, se shoduje s derivací této funkce v bodě $\text{Tr}(u)$, který je zrcadlovým obrazem u .

Důsledek 5.1: Následující výroky jsou ekvivalentní:

- a) Funkce w dle (3.5-1) má kladný konstantní jakobián K , zachovává nulu a její Jacobiova matice komutuje s transpozicí.
- b) Funkce w dle (3.5-1) má tvar $x'+y'c=(a+bc)(x+yc)K^{1/2}$, kde párové číslo $a+bc$ má jednotkový modul.

Důkaz: Nechť platí a). Pak je funkce w analytická. Dosazením (3.5-2) do (3.5-7) dostáváme dvě diferenciální rovnice

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 c^2 = K \quad \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 c^{-2} = K. \quad (3.5-8)$$

Ty mají každá právě dvě řešení, kvadratické a lineární [14]. Kvadratické řešení nevyhovuje podmínce (3.5-2). Konstantní členy lineárních řešení odpadají, neboť w zachovává nulu. Řešení pro kladné K lze tedy zapsat ve tvaru

$$x' = (a_*x + b_*y)K^{1/2} \quad y' = (ay + bx)K^{1/2}, \quad (3.5-9)$$

kde koeficienty jsou reálná čísla. Z (3.5-2) vyplývá, že mezi nimi platí vztahy $a_* = a$, $b_* = bC^2$. Je tedy skutečně

$$(x'+y'c) = (a+bc)(x+yc)K^{1/2}, \quad (3.5-10)$$

přičemž dosazením (3.5-9) do (3.5-5) plyne nutná podmínka

$$a^2 - b^2 c^2 = 1, \quad (3.5-11)$$

takže platí b).

Nechť nyní platí tvrzení b). Pak z něj plyne

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = K^{1/2} a = \frac{\partial y'}{\partial y} \quad (3.5-12)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = K^{1/2} bc^2 \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = K^{1/2} b, \quad (3.5-13)$$

což vyhovuje podmínkám (3.5-2) i (3.5-7). Podmínka (3.5-6) je lineární funkcí (3.5-10) splněna rovněž. Platí tedy i a). ▲

3.6 Kvantifikační a estimační operátory

V dalším je účelné používat polární soustavu souřadnic $(Z_0^{1/S}, \Phi)$,

kde dle 3.1 platí vztahy

$$\Phi = \nu(n), \quad A_0 = \nu(a_0), \quad (3.6-1)$$

$$Z_0^{1/S} = \exp(A_0/S). \quad (3.6-2)$$

Dvojici

$$d := \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle \quad (3.6-3)$$

budeme nazývat DATOVOU DVOJICÍ. Množinu všech datových dvojic označíme \mathcal{R} . Platí tedy

$$\mathcal{R} := R_+ \times R^1. \quad (3.6-4)$$

Vzhledem ke vztahům (3.6-2) a $Z = Z_0 \exp(S\Phi)$ (3.1-12) existuje pro každé pevné S vzájemně jednoznačná korespondence mezi datovými dvojicemi a dvojicemi tvaru $\langle Z, Z_0 \rangle$ i $\langle A_0, \Phi \rangle$, které budeme rovněž využívat.

3.6.1 Gnostické události a gnostické operátory

Nyní tedy máme k dispozici:

a) Struktury obrazů dat $(\mathcal{G}_d, \mathcal{G}_m)$, které vplynuly z prvního axiómu.

b) Dvě dvoualgebry U_J a U_I párových čísel (geometrizované přijetím modulů za vzdálenosti a argumentů za úhly) s je-

jich transpozicí, sdružováním, otáčením a kontrakcemi. Chceme vytvořit párový model neurčitých dat. K tomu zavedeme bijekci nosičů struktur, ta generuje bijekci odpovídajících zobrazení.

Definice 9: Budiž $\tau_C: \mathcal{R} \rightarrow {}_1U_C$ zobrazení takové, že pro všechny datové dvojice $d = \langle Z^{1/S}, \Phi \rangle \in \mathcal{R}$ platí

$$\tau_J(d) = X + Yj, \quad (3.6.1-1)$$

kde X a Y jsou dle (3.3-1). Nechtě dále

$$\tau_I = \tau_J \circ \mathcal{J}, \quad (3.6.1-2)$$

kde \mathcal{J} je zobrazení dle (3.4.1-16). Uvažujme libovolné prvky $a_0 \in \mathcal{R}_0$, $n \in \mathcal{N}$. GNOSTICKOU UDÁLOSTÍ, určenou dvojicí $\langle a_0, n \rangle$, nazveme párové číslo $\tau_C(\exp(v(a_0/S)), v(n))$, kde U a v jsou zobrazení (3.1-1) a (3.1-3). GNOSTICKÝM OPERÁTOREM nazveme zobrazení ${}_1U_C \rightarrow {}_1U_C$.

Platí-li (3.6.1-1), je tedy

$$\tau_I(d) = X + Yi. \quad (3.6.1-3)$$

Gnostický operátor vzájemně zobrazuje gnostické události. Aby byl pojem gnostický operátor konkretizován, je třeba doplnit předpoklady.

Axióm 2: Gnostický operátor je párová funkce ${}_1U_C \rightarrow {}_1U_C$, která má konstantní jakobián, zachovává nulu a jejíž Jacobiova matice komutuje s transpozicí.

Přijímané předpoklady motivujeme takto: Gnostický operátor má být matematickým modelem závislosti dat na neurčitosti kvantifikace a také závislosti charakteristik neurčitosti na datech záměrně měněných při estimaci. Příklad kvantifikace jsme již studovali v předcházejících kapitolách v návaznosti na první axióm. Přišli jsme k modelům, u nichž data byla spojitou a diferencovatelnou funkcí číselných obrazů ideální hodnoty i neurčitosti. Proto považujeme předpoklad diferencovatelnosti gnostického operátoru za přijatelný. Podle věty 5 je požadavek komutativity Jacobiovy matice s transpozicí ekvivalentní s požadavkem analytičnosti, což je zdůvodnitelná technická podmínka. Tato komutativi-

ta má ale i samostatné zdůvodnění spjaté s již zmíněnou diagonální symetrií derivace analytické funkce při $C=J$: požadavek nezávislosti objektivních vlastností operátoru na subjektivní volbě pořadí souřadnic. Bylo by podivné, kdyby pouhá vzájemná výměna obou souřadnic (provedená současně v definiční oblasti i v oblasti hodnot) vedla k různému hodnocení množství neurčitosti, reprezentovaného gnostickým operátorem, neboť toto množství považujeme za objektivní vlastnost dat. Navíc se lze přesvědčit, že vlastnost (3.3-15) maticového modelu je pro tento model ekvivalentem komutativity s transpozicí. Matice $M(0, \Phi)$ mají kromě toho dle (3.3-1)-(3.3-2) determinant (tudiž i jakobián transformace) konstantní a rovný jedné. Ten tedy nezávisí na množství neurčitosti data. Tuto vlastnost interpretujeme (jako - alespoň teoreticky a principiálně - neomezenou poznatelnost poznávané kvantity, jako nepodmíněnou invertibilitu zobrazení. (To ovšem neznamená, že "přesnou inverzi" transformace způsobené neurčitostí lze realizovat prakticky).

Požadavku, aby gnostický operátor zachovával nulu, lze vyhovět posunutím souřadnicového systému oblasti hodnot.

Důsledek 5.2: Mějme gnostické události $u, u' \in {}_1U_C, C=J, I$.

Pak má gnostický operátor zobrazující událost u na u' tvar $u \rightarrow Gu$, kde G je párové číslo

$$G = (|u'|_C / |u|_C) \exp((\arg_C(u') - \arg_C(u))c). \quad (3.6.1-4)$$

Důkaz: Podle axiómu 2 má gnostický operátor vlastnosti podle výroku a) důsledku 5.1, proto je podle ekvivalentního výroku 5.1b lineární funkcí $g(u) = (a+bc)K^{1/2}u$, kde $K > 0$ a $a+bc$ má jednotkový modul podle (3.5-11). Proto ho podle lemmatu 2 můžeme zapsat jako operátor otáčení. Užitím $g(u) = u'$ a důsledku 4.5 dostaneme proto (3.6.1-4). ▲

V souladu s větou 4 tedy lze říci, že gnostický operátor gnostickou událost otáčí a kontrakcí mění její modul.

3.6.2 Kvantifikační struktura gnostických událostí

Věta 6: Buďte \mathcal{G}_d dvojicová struktura (3.2.2-7) a ${}_1U_J$ množina dvojitých čísel prvního druhu. Budiž $*$ operace násobení dvojitých čísel. Pak platí, že struktura

$$\mathcal{G}_J := \langle {}_1U_J, * \rangle \quad (3.6.2-1)$$

je izomorfní se strukturou \mathcal{G}_d .

Důkaz: Struktura \mathcal{G}_d je podle věty 1 izomorfní s maticovou strukturou \mathcal{G}_m (3.3.1-4). Proto stačí dokázat izomorfismus \mathcal{G}_J s \mathcal{G}_m . Z (3.3-2), (3.3-3), (3.3-5), (3.4.2-34) a (3.6.1-1) je patrné, že zobrazení $\mathcal{M} \rightarrow {}_1U_J$ přiřazuje

$$\mathcal{M} \ni \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} \mapsto X+Yj \in {}_1U_J, \quad (3.6.2-2)$$

a je tudíž bijekcí. Porovnáním součinů prvků obou množin se přesvědčíme, že tato bijekce zachovává strukturní operaci. Zobrazení je tudíž izomorfismem. ▲

Nechť $d = \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$, $u = \mathcal{U}_J(d)$. Pak tedy platí

$$u = X+Yj = Z_0^{1/S} \exp(j\Phi), \quad (3.6.2-3)$$

což lze zapsat jako $u = u(Z_0^{1/S}, \Phi)$. Odtud je zřejmé, že množina

$${}_1U_{oJ} := \{ u \in {}_1U_J \mid u(Z_0^{1/S}, 0) = Z_0^{1/S} + 0j \} \quad (3.6.2-4)$$

spolu s operací násobení dvojitých čísel ($*$) tvoří grupu

$$\mathcal{G}_{uo} := \langle {}_1U_{oJ}, * \rangle \quad (3.6.2-5)$$

izomorfní s grupou kontrakcí. Snadno se přesvědčíme, že i množina dvojitých čísel $u(1, \Phi)$, shodná s množinou operátorů otáčení (3.4.2-31)

$$\mathcal{O}_J = \{ u \in {}_1U_J \mid u = \cosh(\Phi) + \sinh(\Phi)j, \Phi \in \mathbb{R}^1 \}, \quad (3.6.2-6)$$

vytváří grupu

$$\mathcal{G}_{un} := \langle \mathcal{O}_J, * \rangle. \quad (3.6.2-7)$$

Vzorec (3.6.2-3) představuje obraz dat jako součin prvků dvou grup. Grupa \mathcal{G}_{uo} je izomorfní s grupou \mathcal{G}_{mo} , grupa \mathcal{G}_{un} s grupou \mathcal{G}_{mn} . Grupa \mathcal{G}_J je direktním součinem obou grup a je modelem ne-

určitých dat, vytvářených v kvantifikačním procesu. Proto budeme strukturu \mathcal{G}_J nazývat KVANTIFIKAČNÍ stejně jako funkce, které z ní ještě odvodíme. Dvojitě číslo (3.6.2-3) je kvantifikační interpretací gnostické události. Jeho modul je funkcí pouze ideální hodnoty, zatímco jeho argument je funkcí pouze neurčitosti. Představujeme-li si kvantifikaci jako takové vytváření posloupnosti obrazů jediné pevné poznávané kvantity, při němž se postupným narůstáním vlivu rušivé kvantity obraz (datum) vzdaluje od ideální hodnoty až ke konečné hodnotě (kterou pozorujeme jako výsledek kvantifikace), je modul kvantifikační události konstantní a mění se jen argument. Účinek kvantifikačního operátoru tedy spočívá v otáčení gnostické události.

3.6.3 Estimační struktura neurčitých dat a estimační operátor

Definice 10: Gnostickou událost v případě $C=J$ nazveme KVANTIFIKAČNÍ, při $C=I$ ESTIMAČNÍ UDÁLOSTÍ. Gnostický operátor nazveme KVANTIFIKAČNÍM při $C=J$ a ESTIMAČNÍM při $C=I$.

Srovnání s (3.6.1-4) ukazuje, že estimační operátor je druhou (komplexní) verzí gnostického operátoru a že jeho účinek spočívá v otáčení estimační události, zachovávajícím (eukleidovský) modul této události.

Lemma 3: Nechť $d = \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$. Pak pro $u = \tau_I(d) \epsilon_1 U_I$ platí

$$|u|_I = Z_0^{1/S} \cosh(2\Phi)^{1/2}, \quad (3.6.3-1)$$

$$\arg_I(u) = \arctan(\tanh(\Phi)). \quad (3.6.3-2)$$

Důkaz: Podle (3.6.1-3) je $u = X + Yi$. Pro modul tohoto komplexního čísla platí dle (3.4.1-13) a (3.3-1)

$$(|u|_I)^2 = X^2 + Y^2 = Z_0^{2/S} (\cosh^2(\Phi) + \sinh^2(\Phi)) = Z_0^{2/S} \cosh(2\Phi). \quad (3.6.3-3)$$

Argument tohoto čísla určíme ze vztahu (3.4.2-51). ▲

Označme $*_I$ operaci násobení komplexních čísel. Pak je

$$\mathcal{G}_I := \langle {}_1U_I, *_I \rangle \quad (3.6.3-4)$$

strukturou estimačních událostí. Ta není izomorfní se strukturou

\mathcal{G}_J (3.6.2-1), jak bylo ukázáno v 3.4.1. Je třeba si též všimnout, že - na rozdíl od \mathcal{G}_J - není struktura \mathcal{G}_I ke své strukturní operaci uzavřena. Estimační události však přesto nebudou přecházet při násobení komplexních čísel diagonály roviny, jak vyplyne ze způsobu jejich užívání a z jejich vazby (3.6.3-2) na čísla dvojitá.

Strukturu \mathcal{G}_I nazveme ESTIMAČNÍ STRUKTUROU. Tato struktura je podle právě uvedeného lemmatu rovněž obrazem struktury neurčitých dat, není ale jejich modelem.

3.6.4 Jedinečnost kvantifikační a estimační struktury

Kvantifikační struktura je modelem dat. Shrňme nyní získané poznatky o jedinečnosti modelu dat.

Věta 7: Budiž \mathcal{Q} množina všech kvantifikačních operátorů a operace skládání zobrazení. Pak platí, že struktura $\langle \mathcal{Q}, \circ \rangle$ je izomorfní s kterýmkoliv modelem dat.

Důkaz: Podle lemmatu 5.2 může být každý kvantifikační operátor $q \in \mathcal{Q}$ reprezentován dvojitým číslem prvního druhu $G(q)$ určeným dle (3.6.1-4). Bijekce $q \mapsto G(q)$ je izomorfismus, neboť složené zobrazení $q_1 \circ q_2$ se reprezentuje součinem $G(q_1)G(q_2)$ příslušných dvojitých čísel. Struktura $\langle \mathcal{Q}, \circ \rangle$ je proto izomorfní se strukturou \mathcal{G}_J (3.6.2-1), a tudíž i s každým modelem dat. ▲

Důsledkem 5.2 byla prokázána existence právě dvou struktur gnostických operátorů, kvantifikační a estimační. Ty navzájem izomorfní nejsou. Druhý axiom vymezil jedinou grupu kvantifikačních operátorů, izomorfní s grupou kvantifikačních událostí, modelem dat. V tomto smyslu je kvantifikační struktura jedinečná.

Co však lze zatím říci k otázce o jedinečnosti estimační struktury? Pozastavme se především u volby názvu pro komplexní alternativu struktury párových čísel. Volba názvu "kvantifikační" pro strukturu dvojitých čísel by měla být považována za přirozenou po tom, co byla vyslovena věta 6 o izomorfismu této struktury s maticovým modelem dat odvozeným z prvního axiomu, který formuluje předpoklady o kvantifikačním procesu. Ke spojo-

vání komplexní verze párových čísel s procesem odhadování ideálních hodnot, s estimací, máme zatím důvody ryze formální. Mezi oběma strukturami existuje bijekce (3.4.1-16), která není izomorfismem. Z věty 4 víme, že ze struktury \mathcal{G}_J (a proto i z \mathcal{G}_I , neboť druh komplexního čísla se shoduje s druhem jemu odpovídajícího dvojitého čísla) lze zavedenými zobrazeními - po rozšíření nosičů o diagonály ${}_0U_C$ - vytvořit dvě algebry, které jsou podle věty 2 v algebraickém smyslu a podle věty 3 i v geometrickém smyslu jedinečné. Axióm 2 rovněž vymezil právě dvě verze gnostického operátoru, dvojitou a komplexní. To vše jsou zmíněné formální důvody. Později však seznáme, že z tohoto dualizmu obou struktur vyplývají i významné věcné důvody pro ztotožnění komplexní struktury s modelem estimačního procesu: taková volba estimačního modelu se ukáže volbou optimální.

Vraťme se tedy k otázce jednoznačnosti: estimační struktura je jediná struktura, která je duální se strukturou kvantifikační.

3.6.5 Trojice gnostických operátorů

Definice 9 gnostického operátoru připouští změny jak argumentu, tak i modulu gnostické události, avšak kvantifikační i estimační operátory mění pouze argument. Za třetí typ gnostického operátoru přijmeme operátor kontrakce dle definice 7, reprezentovaný párovým číslem prvního druhu $k+0c$, kde $k \in \mathbb{R}_+$. Je patrné, že tento operátor mění pouze modul párového čísla a že ho lze považovat jak za dvojitě, tak i za komplexní číslo. Není spjat s neurčitostí dat, nýbrž s jejich ideální hodnotou. Z rovností (3.6.2-3) a (3.6.3-3) vidíme, že kontrakce má stejný účinek jako změna "standardizované" ideální hodnoty $Z_0^{1/S}$. V tomto smyslu je kontrakční operátor modelem vlivu změn poznávané kvantity na datum (při konstantním vlivu neurčitosti), zatímco kvantifikační operátor je modelem vlivu změn neurčitosti na datum (při konstantní poznávané kvantitě). Takové vlastnosti jsme konstatovali už u dvojicových modelů (viz (3.2.2-9) a (3.2.2-10)).

Estimační operátor však tak jednoduše interpretovat zatím neumíme. Je modelem našeho dodatečného, "umělého" působení na datum,

které má zajistit co nejúčinnější potlačení vlivu neurčitosti. Estimační otáčení gnostické události předpokládá neměnnost data jako výsledku kvantifikace, tj. neměnnost (alespoň během estimace) jak poznávané, tak i rušivé kvantitativy. V estimačním procesu se mění pouze náš subjektivní vliv na dané datum. To bude zřejmější později při analýze gnostických cyklů.

3.7 Metrický prostor gnostických událostí a gnostický pohyb

3.7.1 Vzdálenosti a rychlosti

Dvourozměrný lineární prostor zobrazující neurčitá data má v gnostické teorii dvě interpretace, kvantifikační a estimační, spjaté s dvěma typy párových čísel. Kapitola 3.4.2 ukázala, že volba mezi dvojitými a komplexními čísly je současně volbou skalárního součinu, a tudíž i geometrie. Z věty 6 plyne, že prostor kvantifikačních událostí se modeluje množinou dvojitých čísel, a má tudíž geometrii roviny Minkowského. Prostor estimačních událostí, modelovaných množinou komplexních čísel, má Eukleidovu geometrii. Metriku prostoru chápeme ve smyslu Riemannovy geometrie, tj. jako zadání pole metrického tenzoru na diferencovatelné varietě [11]. Roli metrického tenzoru v našem případě hraje matice g_C (3.4.2-1), určující skalární součin (3.4.2-2). Ten určuje i délky cest. Protože jsou zavedeny dva typy skalárního součinu ($C=J, I$), lze délky cest hodnotit dvěma způsoby. Cestu je proto třeba definovat na nosiči obou metrických prostorů. CESTOU $v_C U_C$ nazveme každé spojitě zobrazení uzavřeného intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^1$ do ${}_1 U_C$ opatřené eukleidovskou topologií, které je spojitě diferencovatelné a pro něž platí: jestliže $t \in \mathcal{I}$ a t' je vnitřní bod \mathcal{I} , pak $v(t) \neq v(t')$. Obecné cesty budeme obvykle značit v , OBRAZ CESTY bude $\mathcal{E}_v := v(\mathcal{I}) \subset {}_1 U_C$. Buďte $\mathcal{I} = [a, b]$, $d_1, d_2 \in \mathcal{R}$ datové dvojice, v cesta,

$$u_1 = \mathcal{T}_C(d_1) = v(a), \quad u_2 = \mathcal{T}_C(d_2) = v(b). \quad (3.7.1-1)$$

Délka cesty od gnostické události u_1 k události u_2 po cestě v parametricky zadané párovou funkcí $v^1(t) + v^2(t)c$, ($t \in \mathcal{I}$), je rovna

hodnotě křivkového integrálu

$$l_C(d_1, d_2; v) = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dv^1}{dt}\right)^2 - c^2 \left(\frac{dv^2}{dt}\right)^2} dt. \quad (3.7.1-2)$$

Ta je při $C=I$ reálná vždy, zatímco při $C=J$ je v závislosti na integrační cestě buď reálná, nebo komplexní. Nazvěme ve shodě s [15] derivaci délky parametrizované cesty v podle parametru RYCHLOSTÍ (či úplněji RYCHLOSTÍ POHYBU PO CISTĚ). Z posledního vztahu tedy dostáváme pro rychlost gnostického pohybu obecný výraz

$$\frac{dl_v}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dv^1}{dt}\right)^2 - c^2 \left(\frac{dv^2}{dt}\right)^2}. \quad (3.7.1-3)$$

Zatím jsme používali kartézské souřadnice (v^1, v^2) . Přejdeme k souřadnicím polárním: Nechť značí

$$v_{rC} = |v|_C \quad (3.7.1-4)$$

modulovou složku (3.4.1-13) cesty v a $v_{\omega C}$ její úhlovou složku. Pak pro cestu $v = v^1 + v^2 c$, kde

$$v^1 = v_{rC} \cosh(Cv_{\omega C}) \quad v^2 = v_{rC} c^{-1} \sinh(Cv_{\omega C}) \quad (3.7.1-5)$$

dostáváme rychlost v polárních souřadnicích (r_C, ω_C)

$$\frac{dl_v}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dv_{rC}}{dt}\right)^2 - c^2 v_{rC}^2 \left(\frac{dv_{\omega C}}{dt}\right)^2}. \quad (3.7.1-6)$$

V tomto vzorci má příspěvek úhlové složky rychlosti váhu, která se rovná kvadrátu modulu párového čísla. Zato však ve vzorci pro poměrnou hodnotu rychlosti

$$= \frac{1}{v_{rC}} \frac{dl_v}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d(\log(v_{rC}))}{dt}\right)^2 - c^2 \left(\frac{dv_{\omega C}}{dt}\right)^2} \quad (3.7.1-7)$$

po přechodu k souřadnicím $(\log(r_C), \omega_C)$ mají oba příspěvky váhy konstantní, stejně jako tomu bylo ve vztahu (3.7.1-3).

Zatím jsme se zabývali skalární rychlostí. Srovnáním vztahu (3.7.1-2) s definicí (3.4.2-2) skalárního součinu přicházíme k tomu,

že skalární rychlost $\frac{dl_v}{dt}$ je modulem VEKTORU RYCHLOSTI \dot{v} ,

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} := \frac{dv^1}{dt} + \frac{dv^2}{dt} c. \quad (3.7.1-8)$$

Nás budou zajímat zejména vzdálenosti mezi dvěma událostmi, z nichž druhá vznikla z první určitou transformací, působením gnostického operátoru.

3.7.2 Gnostické cesty a vztahy mezi nimi

Definice 11: Pro každé $d \in \mathcal{R}$ definujeme následující křivky ${}_C v = {}_C v(d)$

a ${}_K v = {}_K v(d)$ a jejich obrazy:

$$(\forall t \in \mathbb{R}^1) ({}_J v: t \mapsto \mathcal{Z}_J(d) \exp(jt)), \quad \mathcal{E}_J := \mathcal{E}_{Jv}, \quad (3.7.2-1)$$

$$(\forall t \in (-\pi/4 - \arg_{\mathbb{I}}(\mathcal{Z}_{\mathbb{I}}(d)), \pi/4 - \arg_{\mathbb{I}}(\mathcal{Z}_{\mathbb{I}}(d))) \\ ({}_{\mathbb{I}} v: t \mapsto \mathcal{Z}_{\mathbb{I}}(d) \exp(it)) \quad \mathcal{E}_{\mathbb{I}} := \mathcal{E}_{\mathbb{I}v}, \quad (3.7.2-2)$$

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+) (C=J, \mathbb{I}) ({}_K v: t \mapsto \mathcal{Z}_C(d)t), \quad \mathcal{E}_K := \mathcal{E}_{Kv}. \quad (3.7.2-3)$$

Restrikce těchto křivek na uzavřené intervaly budeme nazývat GNOSTICKÝMI CESTAMI. Indexy I, J, K budou odlišovat kvantifikační, estimační a kontrakční cesty. Pokud současně uvažujeme gnostickou $({}_C v)$ a kontrakční $({}_K u)$ cestu, je ${}_K v \in {}_1 U_C$.

Řekneme, že párová čísla $u, u' \in U_C$ jsou vzájemně C-ORTOGONÁLNÍ, je-li jejich skalární součin nulový, tj.

$$(u, u')_C = 0. \quad (3.7.2-4)$$

Řekneme, že dvě cesty v, v' jsou v bodě $u \in \mathcal{E}_v \cap \mathcal{E}_{v'}$ navzájem C-ortogonální, existují-li $t \in \text{Dom}(v)$ a $t' \in \text{Dom}(v')$ tak, že platí současně vztahy

$$u = v(t) = v'(t') \quad (v(t), v'(t'))_C = 0. \quad (3.7.2-5)$$

Takto jsme zavedli základní parametrizaci gnostických cest. Za rovněž přípustnou budeme považovat každou parametrizaci odvozenou ze základní parametrizace pomocí ryze monotonního spojitě diferencovatelného zobrazení.

Definice ortogonality párových čísel není triviální, neboť obdobou eukleidovského úhlu $\pi/2$ by byla nekonečná hodnota úhlu měřeného v geometrii Minkowského, ta však by byla spjata s nekonečnými hodnotami složek dvojitého čísla, a ty nejsou definovány. Je-li ale vyloučen nekonečný argument dvojitého čísla, je díky (3.4.2-30) vyloučen i argument $+\pi/2$ i $-\pi/2$ komplexního čísla.

Přesto se setkáváme s párovými čísly vzájemně ortogonálními:

Lemma 4: Platí následující vztahy ortogonality:

$$(\forall u \in U_J)(\forall k \in R_+)((u, k \text{Tr}(u))_J = (u, k \text{Sd}(\text{Tr}(\text{Sd}(u))))_J = 0), \quad (3.7.2-6)$$

$$(\forall u \in U_I)(\forall l \in R_+)((u, k \text{Sd}(\text{Tr}(u)))_I = (u, k \text{Tr}(\text{Sd}(u)))_I = 0). \quad (3.7.2-7)$$

Důkaz: Zřejmý z definice ortogonality párových čísel a z obr.1.

Je patrné, že ortogonalita párových čísel se může vyskytnout jen mezi párovými čísly různého druhu. ▲

Lemma 5: Nechť $d \in \mathcal{R}$. Pak pro $C=J, I$ jsou cesty ${}_C v(d)$ a ${}_K v(d)$ C -ortogonální.

Důkaz: Nechť $u = \mathcal{T}_C(d)$. Při parametrizaci dle definice 11 je

zřejmá $u = {}_K v(1) = {}_C v(0)$. Také je ${}_K \dot{v}(1) = u$, ${}_C \dot{v}(0) = cu$. Pro $C=I$ je $cu = \text{Tr}(\text{Sd}(u))$, pro $C=J$ je $cu = \text{Tr}(u)$, a proto podle lemmatu 4 platí $(u, cu)_C = 0$. ▲

Kontrakční cesta je tedy ortogonální jak ke kvantifikační cestě, tak i k estimační cestě (v příslušné geometrii, v každém bodě, kde se tyto cesty protínají). To ovšem není překvapující, protože v obou případech jde o ortogonalitu tečny kružnice s jejím poloměrem. Gnostická interpretace však už tak samozřejmá není: Pohyb ve směru kontrakční cesty modeluje změny poznávané kvantitivy, tudíž skutečný pohyb. Kvantifikační otáčení modeluje naproti tomu změny rušivé kvantitivy, pohyb zdánlivý. Při estimaci vyvoláváme rovněž pohyb zdánlivý, který má "čelit" změnám způsobeným neurčitostí. Změny dat odrážejí vlivy obou druhů pohybu, ty však separovat neumíme, známe-li pouze data. Nyní jsme však získali další poznatek o odlišnosti těchto dvou vlivů: otáčivý gnostický pohyb je se skutečným pohybem C -ortogonální.

Z (3.7.1-7) a (3.7.1-4) také vyplývá, že vektor rychlosti otáčení je v závislosti na směru otáčení reprezentován párovým

číslem druhého nebo čtvrtého druhu. Derivováním párového čísla podle parametru tedy rovněž přecházíme přes diagonály roviny.

3.7.3 Variační teorém pro gnostické cesty

POMĚRNOU C-DĚLKU cesty v mezi body d_1 a d_2 definujeme ve shodě s (3.7.1-2) a (3.7.1-7) pro $C=J, I$ takto:

$$d_C(d_1, d_2; v) := \int_a^b \frac{1}{v_{rC}} dl_v. \quad (3.7.3-1)$$

Uvažujme pevný interval $[a, b] \in \mathbb{R}^1$. Budiž \mathcal{U}_C množina všech cest ve ${}_1U_C$, parametrizovaných na intervalu $[a, b]$. Pro každé $v \in {}_1U_C$ označme

$$\mathcal{U}_C(v) := \{v' \in {}_1U_C \mid v'(a) = v(a), v'(b) = v(b)\}. \quad (3.7.3-2)$$

Pro každá $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}_+$ definujeme množinu $\mathcal{U}_C(v, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ takto:

$$\mathcal{U}_C(v, \delta_1, \delta_2, \delta_3) := \left\{ v' \in \mathcal{U}_C(v) \mid \begin{array}{l} \sup |v_{rC} - v'_{rC}| < \delta_1, \\ \sup |\dot{v}_{rC} - \dot{v}'_{rC}| < \delta_2, \sup |\dot{v}_{\omega C} - \dot{v}'_{\omega C}| < \delta_3 \end{array} \right\}, \quad (3.7.3-3)$$

kde suprema bereme přes všechny body intervalu $[a, b]$. Lze ukázat, že $\{\mathcal{U}_C(v, \delta_1, \delta_2, \delta_3) \mid v \in \mathcal{U}_C, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}_+\}$ tvoří subbázi nějaké topologie na \mathcal{U}_C . Tuto topologii nazveme C_1 -topologií na \mathcal{U}_C .

Věta 8: Nechť $d \in \mathcal{R}$ a ${}_C v(d)$ (resp. ${}_K v(d)$) je gnostická křivka parametrizovaná dle definice 11. Nechť $[a, b] \in \mathbb{R}^1$ a v značí cestu parametrizovanou na intervalu $[a, b]$. Pak platí:

a) Je-li $v \in {}_I v(d)$, je poměrná I-délka cesty v minimem poměrných I-délek všech cest $v' \in \mathcal{U}_I(v)$.

b) Je-li $v \in {}_J v(d)$ a $\delta = |\tau_J(d)|_J$, pak

1) v každém bodě cesty $v' \in \mathcal{U}_J(v, \delta/2, \delta/4, 1/2)$ je hodnota

$$\frac{1}{v'_{rC}} \frac{dl_{v'}}{dt}$$

ryze imaginární,

2) absolutní hodnota poměrné J-délky cesty v je lokálním maximem absolutních hodnot poměrných J-délek cest $v' \in \mathcal{U}_J(v, \delta/2, \delta/4, 1/2)$.

- c) Je-li $C=I$ a $v \in \mathcal{U}_K^v(d)$, pak je poměrná I-délka cesty v minimem poměrných I-délek všech cest $v \in \mathcal{U}_I(v)$.
- d) Je-li $C=J$ a $v \in \mathcal{U}_K^v(d)$, pak je absolutní hodnota poměrné J-délky cesty v lokálním maximem absolutních hodnot poměrných J-délek cest $v \in \mathcal{U}_J(v, a, 1/2, 1/(2(b+a)))$.

Důkaz: Uvažujme $d_1 = \tau_C^{-1}(v(a))$ a $d_2 = \tau_C^{-1}(v(b))$ a označme \dot{q} derivaci funkce $q(t)$ dle t . Pak za předpokladů věty 8 platí

$$d_C(d_1, d_2; v) = \int_a^b \sqrt{(\dot{v}_{rC}/v_{rC})^2 - c^2(\dot{v}_{\omega C})^2} dt. \quad (3.7.3-4)$$

Je-li $v \in \mathcal{U}_C^v(d)$, je v_{rC} konstantní a $v_{\omega C}(t) = t + \arg_C(\tau_C(d))$.

Nechť v' je cesta ležící v příslušném okolí cesty v . Pro každé $t \in [a, b]$ budiž $w_C(t) = v'_{rC}(t) - v_{rC}(t)$, $\omega_C(t) = v'_{\omega C}(t) - v_{\omega C}(t)$.

V případě a) je

$$\begin{aligned} d_I(d_1, d_2; v') &= \int_a^b \sqrt{(\dot{w}_I / (v_{rI} + w_I))^2 + (1 + \dot{\omega}_I)^2} dt \geq \\ &\geq \int_a^b |1 + \dot{\omega}_I| dt \geq \int_a^b (1 + \dot{\omega}_I) dt = b - a = d_I(d_1, d_2; v). \end{aligned} \quad (3.7.3-5)$$

V případě b) je za přijatých podmínek pro každé $t \in [a, b]$

$$\left(\frac{1}{v'_{rC}} \frac{dl_{v'}}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\dot{w}_J}{v_{rJ} + w_J} \right)^2 - (1 + \dot{\omega}_J)^2 \left(\frac{\delta/4}{\delta - \delta/2} \right)^2 - (1 - 1/2)^2 = 0,$$

takže platí b1). Protože $v' \in \mathcal{U}_J(v, \delta/2, \delta/4, 1/2)$, platí pro každé

$t \in [a, b]$ omezení $|\dot{w}_J(t)| < 1/2$, a tudíž i $1 + \dot{w}_J(t) > 0$; proto

$$\begin{aligned} |d_J(d_1, d_2; v')| &= \left| \int_a^b \sqrt{1 - (\dot{w}_J / ((v_{rJ} + w_J)(1 + \dot{w}_J)))^2} (1 + \dot{\omega}_J) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b (1 + \dot{\omega}_J) dt \right| = |b - a| = |d_J(d_1, d_2; v)|. \end{aligned} \quad (3.7.3-6)$$

V případě c) i d) je $a > 0$ a dle (3.7.1-7) platí pro $|\tau_C(d)|_C = k$ při $v'_{rC} = (t + w_C(t))k$, $v'_{\omega C} = v_{\omega C}(t) + \omega_C(t)$ vztah

$$d_C(d_1, d_2; v') = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt} \log(kt + kw_C)\right)^2 - C^2 \dot{w}_C^2} dt. \quad (3.7.3-7)$$

Pro $C=I$ je

$$d_I(u_1, u_2; v') \geq \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \log(kt + kw_C)\right) dt = \log(b-a) = d_I(d_1, d_2; v). \quad (3.7.3-8)$$

Pro $C=\bar{c}$ a $v' \in \mathcal{U}_J(v, b, 1/2, 1/(2(b+a)))$ platí

$$\left(\frac{1}{v' r_C} \frac{d}{dt} v'\right)^2 = \left(\frac{1 + \dot{w}_C}{t + w_C}\right)^2 - (\dot{w}_C)^2 \geq \left(\frac{1 - 1/2}{b + \bar{c}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2(b + \bar{c})}\right)^2 = 0$$

a pro všechna $t \in [a, b]$ platí $\frac{d}{dt} \log(t + w_C) = (1 + \dot{w}_C)/(t + w_C) > 0$,

tudiž

$$d_J(d_1, d_2; v') \leq \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt} \log(t + w_C)\right)^2} = \log(b/a) = d_J(d_1, d_2; v). \quad (3.7.3-10)$$

Platí tedy c) i d). ▲

V dalším budeme potřebovat doplněk k C v $\{J, I\}$. Položme proto $J' = I$, $I' = J$. Platí tedy

$$\{C'\} = \{J, I\} \setminus \{C\}, \quad -C'^2 = C^2. \quad (3.7.3-11)$$

Důsledek 8.1: Nechtě a, b, v mají tentýž význam jako ve větě 8,

$$d_1 = \tau_C^{-1}(v(a)), \quad d_2 = \tau_C^{-1}(v(b)), \quad \omega_{C1} = \arg_C(v(a)), \quad \omega_{C2} = \arg_C(v(b)).$$

Pak pro poměrnou C -délku cesty v platí vztah

$$d_C(d_1, d_2; v) = (v_{\omega_C}(b) - v_{\omega_C}(a)) C' = (\omega_{C2} - \omega_{C1}) C'. \quad (3.7.3-12)$$

Důkaz: Dosazením $v_{r_C} = \text{konst.}$ do (3.7.3-2). ▲

Z (3.7.3-12) je patrné, že poměrná J -délka úseku kvantifikační cesty je imaginární. Proto se ve větě 8 hovoří o absolutní hodnotě této délky. Estimační cesta má reálnou poměrnou I -délku.

Poškození dat neurčitostí tedy měříme především úhly párových čísel představujících tato data. V kvantifikačním případě je to přirozené, vždyť úhel Φ byl axiómem 1 zaveden jako obraz neurčitosti. Poznatkem je však variační vlastnost této číselné charakteristiky neurčitosti: je to maximum poměrných J -délk cest

variovaných v okolí kvantifikační cesty. Dle tohoto modelu tedy "příroda" kazí data neurčitostí "co nejvíce". Na subjektu, který hodlá odhadováním co nejefektivněji čelit tomuto poškození dat, je výběr cesty, po níž by se co nejsnadněji vrátil k výchozí ideální hodnotě data. K tomu použije cestu s nejmenší poměrnou I-délkou, tj. estimační cestu. To je první věcný důvod, pro nějž jsme se rozhodli nazvat komplexní variantu struktury původních čísel estimační: na estimační cestě platí "opačný" variační princip než na kvantifikační cestě.

Extremální jsou v diferenciální geometrii geodetické čáry. V pseudoeuclidovských prostorech jsou jimi přímky [11], proto vlastnosti kontrakčních cest nejsou ničím neočekávaným. Výše ale bylo ukázáno, že i pro délky oblouků kružnic měřených úhly v obou z uvažovaných metrik lze najít vlastnosti geodetických čar; to proto, že v souřadnicích $(\log(r_C), \omega_C)$ má metrický tenzor dle (3.7.1-6) opět konstantní složky, oblouky kružnic se zobrazí jako úsečky.

3.8 Váha a irrelevance jednotlivého data

Vzorce (3.4.2-55) a (3.4.2-56) mají v dalším značnou důležitost, neboť je lze využít několika způsoby k hodnocení množství neurčitosti dat. Proto se jimi budeme zabývat podrobněji.

V předcházejících úvahách jsme často pracovali s konkrétní datovou dvojicí a při potřebě zdůraznit její konstantnost jsme značili její složky velkými písmeny. V dalším může být proměnná jak datová dvojice d , tak i její obraz, gnostická událost $u = \mathcal{T}_C(d) = x+yc$. Budeme potřebovat i další funkce datových dvojic, případně jejich složek; ty budou též funkcemi gnostických událostí, protože \mathcal{T}_C je bijekcí nosičů \mathcal{R} a ${}_1U_C$. Podle potřeby budeme každou takovou funkci q zapisovat jako $q(d)$, či jako $q(u)$, $q(x,y)$, $q(\Phi)$ apod., a mít přitom na mysli všechny již zavedené bijekce mezi jednotlivými definičními oblastmi.

Definice 12: Budiž $d \in \mathcal{R}$ datová dvojice a $x+yc = \zeta_C(d)$ gnostická událost tuto dvojici reprezentující. VAHOU datové dvojice d nazveme kladné číslo

$$f_C = (x^2 + c^2 y^2) / (x^2 - c^2 y^2) \quad (3.8-1)$$

a její IRRELEVANCÍ reálné číslo

$$h_C = 2xy / (x^2 - c^2 y^2). \quad (3.8-2)$$

Kvantifikační verze ($C=J$) těchto výrazů budeme značit f_J a h_J a estimační verze ($C=I$) f_I a h_I .

VĚRNOSTÍ datové dvojice nazveme její estimační váhu f_I .

Bude užitečné zapsat tyto charakteristiky jako explicitní funkce data a jeho ideální hodnoty.

Lemma 6: Budiž $d = \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$ datová dvojice a A_0 , A a Z dle (3.1-9) až (3.1-14). Budiž

$$Q = \exp(2\Phi). \quad (3.8-3)$$

Pak pro $C=J, I$ platí

$$Q = \exp(2(A - A_0)/S), \quad Q = (Z/Z_0)^{2/S}, \quad (3.8-3')$$

$$f_C = ((Q+1/Q)/2)^{C^2}, \quad (3.8-4)$$

$$h_C = 2(Q-1/Q) / ((Q+1/Q)(1-C^2) + 2(1+C^2)). \quad (3.8-5)$$

Důkaz: Nechť $x+yc = \zeta_C(d)$. Z definice gnostické události vyplývají vztahy $x = Z_0^{1/S} \cosh(\Phi)$ a $y = Z_0^{1/S} \sinh(\Phi)$, proto užitím vzorců hyperbolických funkcí dostaneme

$$y/x = (Q^{1/2} - C^2/Q^{1/2}) / (Q^{1/2} + C^2/Q^{1/2}), \quad (3.8-6)$$

což dosadíme do (3.8-1)-(3.8-2) a výsledek upravíme.

Je patrné, že při $Z=Z_0$ je věrnost rovna jedné a že monotónně klesá, vzdaluje-li se Z od ideální hodnoty. Je to tedy věrnost data ideální hodnotě. Z (3.8-4) vidíme, že

$$f_I = 1/f_J, \quad (3.8-7)$$

takže s růstem vlivu neurčitosti kvantifikační váha roste a estimační váha klesá. Pro přesná data ($Q=1$) jsou obě irrelevance nulové (datum je "plně relevantní" pro posuzování ideální hodnoty). Probíhá-li Q interval hodnot z otevřeného intervalu od

nuly do nekonečna, mění se kvantifikační irrelevance monotónně od minus do plus nekonečna a estimační irrelevance od minus jedné do plus jedné. Zaváděné charakteristiky neurčitosti dat však mají řadu dalších vlastností pozoruhodných z několika hledisek.

3.8.1 Algebraická a geometrická interpretace váhy a irrelevance

Lemma 7: Buďte $d \in \mathcal{R}$ dato i dvojice, $C=J, I$, $u = \tau_C(d)$ gnostická u-
dělost a $\Omega_C = \arg_C(u)$.

Pak platí

$$u/Sd(u) = f_C + ch_C = \cosh(2C\Omega_C) + C^{-1} \sin^2(2C\Omega_C)C. \quad (3.8.1-1)$$

Navíc

$$C=J \Rightarrow Sd(\text{Tr}(u))/u = h_J - jf_J, \quad (3.8.1-2)$$

$$C=I \Rightarrow \text{Tr}(u)/u = h_I + if_I. \quad (3.8.1-3)$$

Důkaz: Provedením naznačeného dělení. Tvar operátoru otáčení o dvojnásobný úhel v (3.8.1-1) plyne ze srovnání definic (3.8-1) a (3.8-2) s důsledkem 4.5. ▲

Váha i irrelevance dat jsou tedy úzce spjaty s operacemi sdružování a transpozice, které vytvářejí z párových čísel čísla "podobná". Podle právě uvedených vztahů jsou složkami párových čísel, která reprezentují významné operátory na množinách dvojitých a párových čísel. Jak váha, tak i irrelevance závisí pouze na argumentu párového čísla, jsou tedy funkcemi neurčitosti data.

3.8.2 Statistická interpretace váhy a irrelevance

Označme $O(\cdot)$ Landauův symbol [16]. Buďte $u \in \mathcal{U}_J$ a Φ, Ψ argumenty párových čísel u a $\mathcal{J}(u)$.

Lemma 8: Nechť pro $C=J, I$ značí f_C a h_C váhu a irrelevantci datové dvojice $d = \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$, $\Psi := \arg_I(\tau_I(d))$.

Pak při $\Phi \rightarrow 0$ platí vztahy

$$\Psi = \Phi + O(\Phi^3), \quad (3.8.2-1)$$

$$f_C = 1 + (2\Phi)^2 C^2 / 2 + O(\Phi^4), \quad (3.8.2-2)$$

$$h_C = 2\Phi + O(\Phi^3), \quad (3.8.2-3)$$

Důkaz: Rozkladem složek operátoru otáčení (3.8.1-1) do Taylorova polynomu a užitím vztahu (3.6.3-2). ▲

Tyto vztahy ukazují, že irrelevance souvisí s chybou dat a váha s rozptýlením dat. Připomeneme-li si (3.1-10), odkud plyne

$$\Phi = (A - A_0) / S, \quad (3.8.2-4)$$

tj. Φ jako "normalizovaná" odchylka aditivního data od ideální hodnoty, ozřejmí se závažný rozdíl gnostických charakteristik oproti běžně užívaným charakteristikám chyb dat. Uvažme nejprve případ dat zatížených jen malou chybou. Pak se jak při $C=J$, tak i při $C=I$ irrelevance přiblíží (z obou stran) k dvojnásobku "obvyklé" chyby (3.8.2-4) a absolutní hodnota odchylky váhy od jedničky k dvojnásobku čtverce této chyby. Kdybychom stanovili průměry těchto charakteristik jednotlivých dat, dospěli bychom k obvyklým statistickým výběrovým odhadům prvního a druhého momentu. Při slabých chybách dat ($\Phi \rightarrow 0$) mají tedy gnostická váha a irrelevance jednoduchou statistickou interpretaci. Při silných chybách dat se od klasických statistických charakteristik významně odlišují. Jak se později přesvědčíme, vyznačují se přirozenou robustností vzhledem k silným chybám dat.

3.8.3 Termodynamická interpretace gnostické váhy: entropie data

Definice 13: Budiž $d \in \mathcal{R}$ datová dvojice, $C=J, I$. ENERGIÍ datové dvojice d nazveme čtverec modulu párového čísla $\tau_C(d)$.

ZMĚNOU ENTROPIE e_C datové dvojice d , mající váhu f_C nazveme hodnotu výrazu f_C^{-1} .

Motivace: Data jsou vytvářena kvantifikací, buď měřením nebo čítáním. Obě tyto možnosti se stále častěji realizují s využitím elektroniky. Tam, kde zatím elektronicky měřit nebo čítat neumíme, můžeme kvantifikační proces elektronicky modelovat. Ve všech takových případech je pak kvantita reprezentována elektrickou veličinou, nábojem, počtem standardních impulsů, proudem či na-

pětím. Ve všech těchto případech je energie "obrazu" kvantitativně (nebo výkon, rychlost změny energie) přímo úměrná čtverci této kvantitativně. My kvantitativně zobrazujeme jako párové číslo. Učinme to alespoň myšlenkově pomocí obrazovky, jejíž nevychýlený svazek elektronů zobrazuje počátek (0+0c) souřadnicového systému (x,yc). Pro periodické zobrazování párového čísla vytvoříme posloupnost vychylovacích impulsů pro horizontální směr (úměrných x) a pro vertikální směr (úměrných y). Energie těchto impulsů bude jednak x^2 , jednak y^2 . Součet (E_I) obou energií přijmeme za model kvadrátu modulu komplexního čísla, rozdíl (E_J) za model čtverce modulu dvojitého čísla. Argument zobrazovaného párového čísla bude přitom spjat nikoliv s energií impulsů, ale s jejich fází. Nás zajímají jen relativní vztahy mezi daty, měřítko zde nehraje roli, a proto koeficient úměrnosti přijímáme za jednotkový.

Párovým číslům, a tím i datům, tudíž přiřazujeme energii. To ale umožňuje přiřadit jim i teplotu, například pomocí myšleného pokusu, při němž tato energie převedená na teplo ohřeje nějaký předmět. Teplota pak bude lineární funkcí energie.

Uvažujme gnostický pohyb představujícího bodu po kvantifikační cestě J_V . Podél této cesty je tedy energie E_J dvojitě proměnné konstantní, rovná se $x^2 - y^2$. Energie $E_I = x^2 + y^2$ komplexní proměnné roste díky příspěvku rušivé kvantitativně. Při pohybu po estimační cestě je energie E_I konstantní a roste energie E_J . Rozdíl $E_I - E_J$ je tedy $2y^2$. Energií přeměněnou na teplo dodáme nějakému tělesu, nebo mu ji odnímáme (podle znaménka C^2). Element předávaného tepelného množství je pak roven

$$dQ = K_q d(2C^2 y^2), \quad (3.8.3-1)$$

kde K_q je nějaká konstanta. Je-li přitom okamžitá teplota tělesa rovna T_C a značí-li Q_1 a Q_2 počáteční a konečnou hodnotu předaného tepelného množství, změní se termodynamická entropie tělesa podle známého vzorce

$$e_C' = \int_{Q_1}^{Q_2} T_C^{-1} dQ_C. \quad (3.8.3-2)$$

Jestliže je teplota určena energií E_C , která je na příslušné cestě konstantní, rovná se

$$T_C = (x^2 - C^2 y^2) K_t \quad (3.8.3-3)$$

(s konstantou K_t) a nezávisí na integrační proměnné. Proto je

$$e'_C = (Q_2 - Q_1) / T_C, \quad (3.8.3-4)$$

neboli

$$e'_C = \frac{K_q}{K_t} \frac{2 - \frac{C^2 y^2}{x^2}}{(x^2 - C^2 y^2)} = \frac{K_q}{K_t} (f_C - 1). \quad (3.8.3-5)$$

Měřítkový koeficient nehraje podstatnou úlohu, volíme jednotku. Pak je změna entropie, odpovídající kvantifikační cestě od ideální hodnoty ($u = Z^{1/S} + 0j$) k hodnotě reprezentované dvojitým číslem $x + yj$, rovna $f_j - 1$, zatímco změna entropie odpovídající estimační cestě od bodu $x + yi$ k bodu s nulovou složkou y je $1 - f_I$. Platí tudíž

$$e'_C = f_C^{-1} = e_C, \quad (3.8.3-6)$$

což motivuje přijímanou definici změny entropie. Termodynamická entropie je kvantitativní charakteristikou využitelnosti (tudíž kvality) energie, neboli neuspořádanosti (neurčitosti) stavu nějakého systému. Váhu data mění příspěvek neurčitosti poznávacího procesu. Vztah (3.8.3-6) představuje termodynamické hodnocení této "informační" neurčitosti.

3.8.4 Difúze entropie

Nad čtvrtrovinou odpovídající ${}_1U_C$ je tedy definováno skalární pole $e_C(x, y)$. Zabývejme se vlastnostmi tohoto pole a s ním souvisejících polí váhy a irrelevance.

Je-li $q: {}_1U_C \rightarrow R^1$ ($C = J, I$) diferencovatelná funkce, pak

$$\text{grad}_C(q) := \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} c \quad (3.8.4-1)$$

značí gradient skalárního pole $q(x, y)$ zapsaný ve tvaru párového čísla.

Mějme párová čísla u, v . Řekneme, že

- A) párové číslo v směřuje v bodě u k ose $\text{Pr}(\cdot)$, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}_+$ tak, že $\text{Pr}(u+kv)=0$,
- B) párové číslo v směřuje v bodě u od osy $\text{Pr}(\cdot)$, jestliže pro všechna $k \in \mathbb{R}_+$ je $\text{Pr}(u+kv) \neq 0$.

Věta 9: Nechť $d \in \mathcal{R}$ je datová dvojice, $C=J, I$, ${}_C v(d)$ gnostická křivka a \mathcal{E}_C její obraz. Pak platí

- a) $(\exists k \in \mathbb{R}_+)(\forall u \in \mathcal{E}_C)(|\text{grad}_C(e_C(u))|_C = k |\text{grad}_C(f_C(u))|_C = k |h_C(u)|)$,
- b) $(\exists k \in \mathbb{R}_+)(\forall u \in \mathcal{E}_C)(|\text{grad}_C(h_C(u))|_C = k f_C(u))$,
- c) v bodě $u=x+yc \in \mathcal{E}_C$ jsou $\text{grad}_C(f_C(u))$ i $\text{grad}_C(h_C(u))$ kolineární s vektorem rychlosti $\dot{\Gamma}$ po cestě Γ v bodě $x+yi$,
- d) pro všechna $u=x+yc \in \mathcal{E}_C$ směřuje $\text{grad}_J(f_J)$ v bodě $x+yj$ od osy $\text{Pr}(\cdot)$ a $\text{grad}_I(f_I)$ v bodě $x+yi$ k této ose,
- e) pro všechna $u=x+yc \in \mathcal{E}_C$ směřuje $\text{grad}_C(h_C)$ v bodě u k ose $\text{Pr}(\cdot)$.

Důkaz: Provedením derivací naznačených v (3.8.4-1) dostaneme

$$\text{grad}_C(f_C) = \text{grad}_C(e_C) = (4C^2xy/(x^2-C^2y^2)^2)(-y+xc), \quad (3.8.4-2)$$

$$\text{grad}_C(h_C) = 2(x^2+C^2y^2)/(x^2-C^2y^2)^2(-y+xc). \quad (3.8.4-3)$$

Tyto vztahy upravíme zavedením modulu $r_C = |u|_C$ a irrelevance h_C dle (3.8-2) na

$$\text{grad}_C(f_C) = (2C^2h_C/r_C^2)(-y+xc), \quad (3.8.4-4)$$

$$\text{grad}_C(h_C) = (2f_C/r_C^2)(-y+xc). \quad (3.8.4-5)$$

Na křivce ${}_C v(d)$ je jak r_C , tak i $|-y+xc|_C$ konstantní, proto platí a) i b). Vektor rychlosti pohybu po estimační cestě je podle lemmatu 5 ortogonální s číslem $x+yi$, stejně jako číslo $-y+xi$. Proto porovnáním s (3.8.4-4)-(3.8.4-5) vyplývá c).

Nechť při kvantifikaci roste y od nuly. Představující bod opisuje kvantifikační křivku od ideální hodnoty u_0 a $\text{grad}_C(f_C)$ je zaměřen jako $-y+xc$, vzhůru vlevo (obr.2a), tedy od osy $\text{Pr}(u)$. Bod \bar{u} se přitom pohybuje opačně, jako ve spodní části

obr.2a. Při $C=I$ se změní smysl gradientů jako na obr.2c, platí tedy d). Platnost tvrzení e) je zřejmá z (3.8.4-5) a z obr.2b a 2d.

▲

Gradient je kolineární se směrem největšího růstu skalárního pole. Analyzovaná pole mají speciální kruhovou povahu: podél všech kružnic různých poloměrů je závislost pole na úhlu stejná. Proto nám připadá ten směr a smysl gradientů zkoumaných polí, který mají v estimační metrice (při $C=I$), jako přirozený: estimační váha klesá při vzdalování data od ideální hodnoty nejstrměji proti směru rychlosti pohybu, podél tečny k estimační cestě. Estimační irrelevance od limitní hodnoty -1 monotónně roste k $+1$, jestliže Q probíhá interval od $-\infty$ k $+\infty$, a spádnice reliéfu pole irrelevance se také přirozeně kryje s estimační cestou (obr.2d). Jak si ale vysvětlit, že i při $C=J$ zůstává spádnice zachována, ačkoliv pohyb se uskutečňuje po jiné, kvantifikační cestě, po cestě, která je z hlediska Eukleidovy geometrie hyperbolou? Příčina je v existenci dvou gradientů v Minkowského geometrii. Lze ukázat, že kontravariantní gradient [17] je zaměřen ve směru tečny kvantifikační cesty, avšak použitý vzorec pro výpočet gradientu odpovídá kovariantnímu gradientu v Minkowského geometrii a jedinému existujícímu gradientu v eukleidovské geometrii. Nyní tedy víme, že z každého bodu kvantifikační cesty, kam neurčitost vychýlila datum, čímž zvýšila entropii, vede spádnice entropie podél estimační cesty, a že je to současně spádnice dalších polí.

Důsledek 9.1: Budiž $d \in \mathcal{K}$ datová dvojice. Pak cesta $v \in \mathcal{I}_v(d)$ směrem k ose $Pr(\cdot)$ je cestou nejstrmějšího poklesu entropie a nárůstu věrnosti datové dvojice, jakož i cestou nejstrmějšího návratu kvantifikační i estimační irrelevance k nule.

Dospěli jsme k druhému věcnému důvodu pro výběr estimační cesty: Tato cesta zajišťuje nejstrmější návrat data (u) do stavu s anulovanou složkou $Se(u)$.

První dvě tvrzení věty 9 upozorňují na vzájemnost váhy a irrelevance, kterou se vyznačují vlnové procesy. Skutečně, pro tyto vzájemně vázané proměnné snadno odvodíme vlnové rovnice. K tomu

zavedeme Laplaceův operátor:

Budiž $C=J, I$, $q: {}_1U_C \rightarrow R^1$ dvakrát diferencovatelná funkce. Pak

$$\nabla_C^2(q) := \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \quad (3.8.4-6)$$

značí Laplaceův operátor pro obě uvažované geometrie [17].

Důsledek 9.2: Nechť $d \in \mathcal{R}$ je datová dvojice a f_C a h_C její váha a irrelevance. Pak platí

$$\nabla_C^2(f_C) + 4r_C^{-2} f_C = 0, \quad (3.8.4-7)$$

$$\nabla_C^2(h_C) + 4r_C^{-2} h_C = 0. \quad (3.8.4-8)$$

Důkaz: Derivováním gradientů (3.8.4-2)-(3.8.4-3) a dosazením do (3.8.4-6). ▲

Nyní tedy lze shrnout termodynamickou interpretaci váhy a irrelevance takto: pole váhy dat se jen o konstantu liší od pole entropie, irrelevance charakterizuje strmost reliéfu pole entropie nad rovinou zobrazující data, difúzní tok entropie. Rozložení změn entropie, a tudíž i vah dat a irrelevancí, nad rovinou zobrazující data je podřízeno vlnovým rovnicím.

3.9 Informační změny a distribuční funkce individuálních dat

3.9.1 Vzájemná přeměna entropie a informace

Výraz získaný v (3.8.4-6) aplikací Laplaceova operátoru (zapsaného v dvou geometriích v souladu s obecným tvarem [17]) má v teorii pole významnou interpretaci jako zřídlo skalárního pole, bodový výtok gradientu pole. Z (3.8.3-6) a (3.8-1) je patrné, že při kvantifikaci entropie roste, při estimaci klesá. Její zřídla či nory mají na celé definiční oblasti ${}_1U_C$ s výjimkou přímky $y=0$ nenulovou vydatnost. Z čeho se změny entropie rodí v jedné fázi gnostického procesu a kam se ztrácejí v jiné fázi? Druhý člen rovnosti (3.8.4-7) kryje vydatnost zřidel entropie a tají v sobě odpověď na tuto otázku. Entropie hodnotí neuspořádanost, neurčitost. Přijmeme hypotézu, že změny entropie dat jsou vzájemně spjaty se změnami jiné charakteristiky neurčitosti, množství

informace, která je v datech obsažena. Taková hypotéza je již dlouho předmětem intenzivního zájmu. V našem případě ji lze konkretizovat jako předpoklad o existenci pole informačních změn, které svými zřídly kompenzuje záporná zřídla (nory) pole změn entropie a naopak.

Připomeňme si konvenci o alternativní parametrizaci funkcí, uvedenou na počátku článku 3.8 i o C' jako doplňku C v $\{J, I\}$, zavedenou v (3.7.3-11). Označme

$$\Gamma_J := (0, 1), \quad (3.9.1-1)$$

$$\Gamma_I := \{(1-tI)/2 \mid t \in \mathbb{R}^1\}. \quad (3.9.1-2)$$

Pro každé $u \in {}_1U_C$ položme

$$p_C := (1-h_C, C)/2. \quad (3.9.1-3)$$

Pak - jak lze snadno ověřit -

$$\Gamma_C = \{p_C(u) \mid u \in {}_1U_C\}. \quad (3.9.1-4)$$

Definice 14: ZMĚNOU INFORMACE nazveme zobrazení $i_C: \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}^1$ takové, že pro každé $u \in {}_1U_C$ platí

$$a) \quad r_C^2, \nabla_C^2(e_C) \Big|_u = - \frac{d^2 i_C}{dp_C^2} \Big|_{p_C(u)}, \quad (3.9.1-5)$$

$$b) \quad i_C(p_C) \Big|_{1/2} = 0, \quad \frac{di_C}{dp_C} \Big|_{1/2} = 0. \quad (3.9.1-6)$$

Porovnání levé strany (3.9.1-5) s (3.8.4-6) ukazuje, že při konstantním r_C , má tento výraz hodnotu nezávislou na měřítku, neboť vynásobením čtvercem modulu je ekvivalentní s užitím proměnných $(x/r_C, y/r_C)$ při derivování. Výsledek tedy představuje "relativizovanou" vydatnost zřídla entropie. Na pravé straně (3.9.1-5) pak stojí vydatnost zřídla skalární funkce $i_C(p_C)$, jejíž tvar zatím neznáme, ale požadavkem a) zajišťujeme, aby její zřídla kompenzovala zřídla entropie. Je-li r_C konstantní, je konstantní i poměr vydatností zřídla obou funkcí podél příslušné kružnice, tj. podél gnostické křivky C , v. Takovou funkci i_C jsme se rozhodli přijmout za změnu informace. Požadavky b) zadávají pouze integrační konstanty.

Budiž $h_C: \Gamma \cup \Gamma \rightarrow R_+$ funkce

$$h_C(t) := -(t)\log(t) - (1-t)\log(1-t). \quad (3.9.1-7)$$

Věta 10: Funkce i_C je změnou informace dle definice 14, právě když pro každé $u \in U_C$ platí

$$i_C(p_C(u)) = h_C(1/2) - h_C(p_C(u)). \quad (3.9.1-8)$$

Důkaz: Rovnost (3.8.4-7) upravíme vynásobením r_C^2 , na tvar

$$r_C^2 \nabla_C^2(f_C) = -4((x^2 + y^2 c^2)/(x^2 - y^2 c^2))^2. \quad (3.9.1-9)$$

Na pravé straně je podle (3.8-1) záporně vzatý čtyřnásobek kvadrátu váhy data, tj. $-4f_C^2$. Provedeme úpravy:

$$-4f_C^2 = -4/(1 - 4x^2 y^2 c^2 / (x^2 + y^2 c^2)^2) = -4/(1 - c^2 h_C^2) = -1/(p_C(1-p_C)),$$

takže

$$r_C^2 \nabla_C^2(e_C) = \frac{d}{dp_C} (-\log(p_C) + \log(1-p_C)). \quad (3.9.1-10)$$

Nechť i_C vyhovuje definici 14. Pak z (3.9.1-5) a (3.9.1-10) plyne

$$\frac{d}{dp_C} (+\log(p_C) - \log(1-p_C)) = -\frac{d^2 i_C}{dp_C^2}. \quad (3.9.1-11)$$

Dvojnásobnou integrací a dosazením podmínek b) dostáváme vztah (3.9.1-8).

Nechť naopak platí (3.9.1-8). Pak i_C vyhovuje bodu b) z definice 14. Navíc dvojnásobným derivováním i_C podle p_C odvodíme (3.9.1-11), což spolu s (3.9.1-10) implikuje platnost podmínky a) definice 14.

Hypotéza o existenci pole změn informace data, jehož zřídla kompenzují nory termodynamické entropie data (a naopak) se tedy potvrdila. Odvodili jsme však i tvar pozoruhodné funkce i_C . Zabývejme se podrobněji jejími vlastnostmi. K oprávnění jejího názvu se vrátíme později. Je-li však tato funkce změnou informace jednotlivého data, má (3.9.1-5) mimořádný význam, popisuje vzájemnou přeměnu informace na termodynamickou entropii při kvantifikaci a opačnou přeměnu při estimaci.

Funkci i_C jsme zavedli jako $i_C: \Gamma \rightarrow R^1$, tj. jako $i_C(p_C)$. Protože $\mathcal{C}_C \circ p_C$ je zobrazení z množiny \mathcal{R} datových dvojic na Γ_C , můžeme

a budeme v dalším interpretovat funkci i_C jako zobrazení z množiny \mathcal{R} , resp. z ${}_1U_C$ do R^1 , tedy jako funkci, která ke každému $d \in \mathcal{R}$ (resp. $u \in {}_1U_C$) přiřazuje $i_C(p_C(\mathcal{T}_C(d)))$, resp. $i_C(p_C(u))$. Jak je však patrné z (3.8.1-1), závisí irrelevance pouze na argumentu párového čísla (tj. pouze na neurčitosti data). Proto se bude dále vyskytovat i parametrizace $i_C(\text{arg}_{\mathcal{E}_C}(u))$, neboli - v úplnosti - $i_C(p_C(h_C(\text{arg}_{\mathcal{E}_C}(u))))$.

Důsledek 10.1: Pro každou gnostickou událost $u \in {}_1U_C$, $C=J,I$, platí

$$i_C(h_{C,}) = (h_{C,}C) \operatorname{arctanh}(h_{C,}C) + \log \sqrt{1-h_{C,}^2C^2}. \quad (3.9.1-12)$$

Důkaz: Dosazením (3.9.1-3) do (3.9.1-7) a (3.9.1-8). ▲

Důsledek 10.2: Budiž $u \in {}_1U_C$, $C=J,I$, gnostická událost, jejíž argument je \mathcal{Q}_C . Pak platí

$$i_C(\mathcal{Q}_C) = (2C\mathcal{Q}_C) \operatorname{tanh}(2C\mathcal{Q}_C) - \log(\cosh(2C\mathcal{Q}_C)). \quad (3.9.1-13)$$

Důkaz: Irrelevance $h_{C,}$ se dle (3.8.1-1) rovná $\sinh(2C'\mathcal{Q}_{C,})/C'$ a je dle (3.7.3-11) a dle vzorců hyperbolických funkcí shodná s $C^{-1} \operatorname{tanh}(2C\mathcal{Q}_C)$. Výraz $1-h_{C,}^2$ je roven $1/\cosh^2(2C\mathcal{Q}_C)$, což dosadíme do (3.9.1-10). ▲

Důsledek 10.3: Buďte $d \in \mathcal{R}$ datová dvojice a Φ, Ψ argumenty gnostických událostí $\mathcal{T}_J(d)$ a $\mathcal{T}_I(d)$. Pak platí

$$i_J = 2\Phi \operatorname{tanh}(2\Phi) - \log(\cosh(2\Phi)), \quad (3.9.1-14)$$

$$i_I = -2\Psi \operatorname{tan}(2\Psi) - \log(\cos(2\Psi)) = \quad (3.9.1-15) \\ - (\sinh(2\Phi)) \operatorname{arctan}(\sinh(2\Phi)) + \log(\cosh(2\Phi)).$$

Důkaz: Použitím (3.9.1-13) a (3.4.2-50)-(3.4.2-54). ▲

Obě funkce i_J i i_I jsou sudé, první monotónně roste od nuly k limitní hodnotě $\log(2)$, druhá monotónně klesá od nuly do minus nekonečna. Tento zdánlivý paradox lze vysvětlit poukazem na zřejetelnou vzájemnost kvantifikačního a estimačního procesu: při kvantifikaci narůstá entropie s neurčitostí na úkor množství informace, které bude možné estimací vrátit. Při estimaci snižujeme entropii na úkor informace "spotřebované" při kvantifikaci. Kvantifikační ztráty informace jsou tedy hodnoceny funkcí i_I a množství informace navrácené při estimaci je měřeno funkcí i_J . Je patrné, že kvantifikační ztráty (při nenulovém vlivu neurči-

tosti) nelze estimací plně nahradit. Porovnání (3.9.1-14) s (3.9.1-15) dokonce umožňuje informační změny rozdělit na "nevratné" (první členy $2\Phi \tanh(2\Phi)$ a $-2\Psi \tan(2\Psi)$) a na "vratné", vzájemně se vyrovnávající změny, charakterizované druhými z členů; ty jsou oba $\log(\cosh(2\Phi))$ a přispívají k i_J a i_I s opačnými znaménky.

Důsledek 10.4: Uvažujme označení jako v důsledku 10.2. Pak platí pro $C=J, I$

$$\frac{d i_C}{d(2C\Omega_C)} = 2C\Omega_C / \hat{f}_C^2. \quad (3.9.1-16)$$

Důkaz: Derivováním (3.9.1-13). ▲

Tento výsledek nabízí zajímavou interpretaci funkce i_C jakožto střední vážené hodnoty "chyby" $2C\Omega_C$, přičemž roli váhy zde hraje převrácená hodnota váhy datové dvojice, ta je na "chybě", tj. na neurčitosti silně závislá. Kdyby tato váha byla konstantní, byla by funkce i_C kvadratickou funkcí, takto však má tvar funkce

s unikátními vlastnostmi, jak se ještě zmíníme.

Důsledek 10.5: Nechť $O(\cdot)$ značí opět Landauův symbol. Uvažujme opět označení dle důsledku 10.3. Pak pro $\Phi \rightarrow 0$ platí

$$i_J = 2\Phi^2 + O(\Phi^4), \quad (3.9.1-17)$$

$$i_I = -2\Phi^2 + O(\Phi^4). \quad (3.9.1-18)$$

Důkaz: Rozkladem (3.9.1-14) a (3.9.1-15) do Taylorova polynomu a užitím 3.8.2-1. ▲

Při slabých chybách se tudíž ztráty informace přibližují ke kvadratické funkci "klasické" normalizované chyby (3.8.2-4). Při silném vlivu neurčitosti se informační ztráty od kvadratické chyby podstatně odlišují. Je zajímavé konfrontovat tento výsledek jednak s lemmatem 8 a jednak s obecně známými dobrými zkušenostmi s metodou nejmenších čtverců, která v mnoha praktických situacích dává uspokojivé výsledky i tehdy, kdy nelze prokázat, že platí statistické předpoklady, za nichž je extremalizace kvadratického kritéria optimálním postupem. Podle lemmatu 8 a (3.8.3-6) je při slabých chybách dat změna entropie data blízká kvadratické funkci, stejně jako informační změny podle

důsledku 10.5. Za těchto omezení tedy extremalizace kvadratického kritéria minimalizuje jak nárůst entropie, tak ztrátu informace dat. Všimněme si ještě, že při slabých chybách dat se estimační změny entropie i informace přibližně shodují s kvantifikačními, jsou "vratné". To ovšem ukazuje na principiální rozdíl mezi situacemi se slabými a silnými poruchami dat: Jak jsme právě seznali, jsou v obecném případě změny informace nevratné. Pro entropii to prokážeme též:

Lemma 9: Budiž $\langle Z^{1/S}, \Phi \rangle$ datová dvojice. Pak pro kvantifikační a estimační změny entropie (3.8.3-6) platí

$$(\Phi \neq 0) \Leftrightarrow (e_J + e_I = \cosh(2\Phi) + 1 / \cosh(2\Phi) - 2 > 0), \quad (3.9.1.19)$$

$$e_J + e_I = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0. \quad (3.9.1-20)$$

Důkaz: Dle definice 13 a (3.8-7) je $e_J + e_I = f_J + 1/f_J - 2$, odkud dle

(3.8.1-1) plyne žádané. ▲

Takto tedy lze objasnit v novém světle příčiny časté úspěšnosti metody nejmenších čtverců a současně vymežit podmínky, za nichž lze použití této metody zdůvodnit: Poruchy dat musí být tak slabé, aby mohly být zanedbány příspěvky čtvrtých a vyšších mocnin normalizované chyby. Za takové podmínky metoda nejmenších čtverců minimalizuje přibližně jak zvýšení termodynamické entropie, tak i ztráty informace způsobené neurčitostí dat.

3.9.2 Distribuční funkce a hustota datové dvojice

Věnujme se nyní funkci p_C , především její kvantifikační verzi p_J . Ta je podle (3.9.1-3) reálnou funkcí estimační irrelevance. V článku 3.6.1 jsme popsali korespondenci mezi datovými dvojicemi $\langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$ a dvojicemi $\langle Z_0, Z \rangle$, resp. $\langle A_0, \Phi \rangle$. Proto lze p_C parametrizovat kteroukoliv z uvedených dvojic. Z lemmatu 6 plyne, že irrelevance h_C , a tudíž i funkce p_C , závisí při daném S pouze na podílu Z/Z_0 , resp. na rozdílu $A - A_0$.

Lemma 10: Pro každé $d = \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$ a Z, A, A_0 dle (3.1-10) - (3.1-14) platí

$$a) \quad p_J(d) = 1/(1+(Z/Z_0)^{4/S}) = 1/(1+\exp(4(A-A_0)/S)) \quad (3.9.2-1)$$

b) Nechť je $A \in \mathbb{R}^1$ pevné. Pak je funkce $p_J(A_0, A)$ spojitá, spojitě diferencovatelná a monotónně rostoucí. Navíc platí

$$\lim_{A_0 \rightarrow -\infty} (p_J(A_0, A)) = 0, \quad \lim_{A_0 \rightarrow \infty} (p_J(A_0, A)) = 1. \quad (3.9.2-2)$$

c) Platí

$$p_J(A, A) = 1/2. \quad (3.9.2-3)$$

Důkaz: Bod a) plyne z lemmatu 6, b) a c) z a). ▲

Při pevných $A \in \mathbb{R}^1$, $S \in \mathbb{R}_+$ funkci $p_J(A_0, A)$ označíme $p_J(A_0 | A)$ a nazveme DISTRIBUČNÍ FUNKCÍ ideální hodnoty A_0 , podmíněnou datem A . Podle lemmatu 10b je $p_J(A_0 | A)$ distribuční funkcí v obdobném smyslu, jaký má v teorii pravděpodobnosti. Při $Z_0 \in \mathbb{R}_+$ a pevných $Z, S \in \mathbb{R}_+$ označíme

$$p_J(Z_0 | Z) := p_J(Z_0, Z). \quad (3.9.2-4)$$

Tuto funkci nazveme distribuční funkcí Z_0 , podmíněnou Z . Tato funkce se liší od distribuční funkce teorie pravděpodobnosti reparametrizací definičního oboru.

Zabývejme se nyní věcnými důvody, které vedou ke sblížení obsahu pojmů distribučních funkcí logicky vyplývajících z gnostické teorie jednotlivých dat se smyslem, jaký má pravděpodobnostní distribuce nějaké náhodné veličiny. Významné společné rysy existují, přestože gnostický model je vybudován na pojetí neurčitosti, odlišném od statistického. Povšimněme si především formální podoby funkce h_J s funkcí, kterou by shannonovská teorie informace [18] hodnotila informační entropii binárního pravděpodobnostního systému s pravděpodobnostmi číselně shodnými s p_J a $1-p_J$; ostatně inspirací Shannona k volbě této funkce byla již dlouho předtím užívaná Boltzmannova funkce, hodnotící entropii pravděpodobnostně definovaného termodynamického systému. Pro

nás je zde důležité, že v obou případech se jako parametr funkce typu h_J vyskytuje pravděpodobnost nějakého jevu.

Pokusme se o intuitivní gnostické vysvětlení funkce p_J :

Máme apriorní znalost o přesnosti určité kvantifikační metody - známe parametr měřítka S . Uskutečnili jsme touto metodou měření neznámé kvantity mající ideální hodnotu A_0 , výsledek je A . Funkce $p_J(A_0|A)$ pak charakterizuje podmíněnou míru OČEKÁVANOSTI toho, že neznámá ideální hodnota nepřevýší A_0 . Datum A je tedy konstanta a $A_0 = p_J^{-1}(P)$ je "kvantilem" pro očekávanost P . Očekávanost hodnot $A_0 \leq A$ je $1/2$, stejně jako pro $A_0 > A$. Ke každému intervalu (A_{01}, A_{02}) je tedy přiřazena míra očekávání $p_J(A_{02}|A) - p_J(A_{01}|A)$ toho, že skutečná ideální hodnota je v tomto intervalu. Parametr měřítka určuje strmost distribuční funkce. Tuto úvahu jsme ovšem mohli provést i pro multiplikatívni formu dat, v níž jsou možná data i ideální hodnoty kladnými čísly. Je patrné, že funkce p_J indukuje míru na borelovské algebře (generované jednorozměrnými reálnými intervaly) jako pravděpodobnostní distribuční funkce.

Existuje však i zcela jiný významný způsob propojení tohoto gnostického pojmu se statistickým:

Definice 15: Budiž $k(a)$ borelovská funkce $R^1 \rightarrow R^1$. Řekneme, že

funkce $k(a)$ je PARZENOVÝM JÁDREM, jestliže platí:

$$a) \quad \sup_{-\infty < a < \infty} |k(a)| < \infty, \quad (3.9.2-5)$$

$$b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |k(a)| da < \infty, \quad (3.9.2-6)$$

$$c) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} |ak(a)| = 0, \quad (3.9.2-7)$$

$$d) \quad \int_{-\infty}^{\infty} k(a) da = 1, \quad (3.9.2-8)$$

$$e) \quad (\forall a \in R^1)(k(a) = k(-a)). \quad (3.9.2-9)$$

Parzenova jádra se používají k neparametrickému odhadování hustot pravděpodobnosti. Parzen v [19] dokázal podmínky, za nichž jsou jádrové odhady hustoty i modu (využívající normalizovaný součet jader "rozmazávajících" příspěvky jednotlivých dat) asymptoticky nestranné, konzistentní a asymptoticky normální. Další vývoj zobecnil metodu a její teorii i na vícerozměrné případy, jak ukazuje např. [20].

Věta 11: Nechtě je $A \in \mathbb{R}^1$ pevné. Pak platí, že funkce

$$g := \frac{d p_J(A_0 | A)}{d A_0} \quad (3.9.2-10)$$

má tvar

$$g(A_0, A, S) = S^{-1} / \cosh^2(2(A - A_0)/S) = S^{-1} / \cosh^2(2\Phi) \quad (3.9.2-11)$$

a je Parzenovým jádrem ve smyslu definice 15.

Důkaz: Derivováním (3.9.2-1) dle A_0 . Splnění podmínek a) až e) funkcí $g(A_0, A, S)$ je zřejmé. ▲

Parzenova teorie neparametrického odhadování připouští bohatý výběr jader a konkrétní volbu tvaru jádra ponechává na uživateli metody. Při vyrovnávání hustot pravděpodobnosti z malých výběrů se však ukazuje, že tvar jádra rozhoduje o kvalitě aproximace a praktické použitelnosti jádrových odhadů hustot i distribučních funkcí, zejména v oblasti extrémně malých a velkých kvantilů. Věta 11 spolu s výsledky, o něž se opírá, ukazuje, že v gnostické teorii je Parzenovo jádro jedním z dokazatelných výsledků a že to je jádro jediného, zcela určitého typu. V aplikační části této práce bude na příkladech ilustrována použitelnost jader gnostického typu k řešení obtížných úloh zpracování malých datových souborů.

Na tomto místě má však význam zejména metodická stránka Parzenova přístupu, podpora interpretace nestatistické funkce p_J jakožto distribuční funkce neurčitosti, kterou můžeme použít případně

i k odhadování pravděpodobnosti jevů. Distribuční funkci ideální hodnoty A_0 (resp. Z_0), podmíněnou datem A (resp. Z), i její derivaci podle A_0 (resp. Z_0) však budeme používat i v jiných případech, kdy by pravděpodobnostní interpretace nebyla zdůvodnitelná. Pro zkrácení budeme používat názvy **DISTRIBUČNÍ FUNKCE** a **HUSTOTA DATOVÉ DVOJICE**, případně jen **D.F.** a **H. DATA**.

Vraťme se nyní ještě k rovnosti (3.9.2-11); ta nabízí další zajímavé interpretace zavedených i dalších pojmů.

Definice 16: Kvantifikačním nebo estimačním ROZPTYLEM datové dvojice $d \in \mathcal{R}$ nazveme čtverec její irrelevance, číslo $h_C^2(d)$.

Důsledek 11.1: Mezi hustotou datové dvojice, věrností, estimačním rozptylem, hodnotou p_J distribuční funkce, kvantifikačním rozptylem a kvantifikační vahou platí vztahy

$$g(A_0, A, S) = f_I^2/S = (1-h_I^2)/S = 4(1-p_J)p_J/S = \quad (3.9.2-12)$$

$$1/((1+h_J^2)S) = 4/((1-p_I)p_I S).$$

Důkaz: První ze vztahů plyne z (3.8.1-1) a (3.9.2-11), ostatní z definic uváděných funkcí. ▲

Z lemmatu 8 víme, že při slabých chybách dat by se čtverce obou irrelevancí sblížily se čtvercem chyby (3.8.2-4), průměr gnostických rozptylů jednotlivých dat by se shodoval s výběrovým odhadem statistického druhého momentu, s rozptylem dat. Statistický moment je funkcí hustoty pravděpodobnosti, estimační rozptyl je dle (3.9.2-12) funkcí hustoty a naopak. Budeme-li v dalším například odhadovat ideální hodnotu A_0 či Z_0 z podmínky maximalizace součtu čtverců věrností, budou tím současně minimalizovány estimační rozptyly a maximalizovány součty hustot dat. Na rozdíl od (nerobustního) statistického pojetí rozptylu, který roste se čtvercem chyb, je estimační rozptyl datové dvojice omezen hodnotou 1, což významně snižuje vliv hrubých chyb dat na odhady. Navíc se vzorcem (3.9.2-12) nabízí interpretace hustoty dat jako rozložení "určitosti" dat, měřené odchylkou rozptylu data od jedničky. Další poznámku zasluhují ty členy rovnosti (3.9.2-12), v nichž se vyskytují funkce p_J a p_I . V teorii informace se z různých důležitých důvodů zkoumají zobecněné in-

formační entropie, definované odlišně od Shannonova pojetí. Zajímavé vlastnosti byly zjištěny [21] u zobecněné entropie definované pro dvojici disjunktních náhodných jevů s pravděpodobnostmi P a $1-P$ ve tvaru $(1-P)P$. Přijmeme-li p_G za P , dostaneme dvě (gnostické) verze takové zobecněné entropie, shodující se až na měřítkový faktor - s výrazy v (3.9.2-12).

Shrňme tedy motivace, opravňující přijetí funkce p_J za gnostický ekvivalent pravděpodobnosti:

- 1) Indukuje pravděpodobnostní míru na algebře reálných intervalů, jak plyne z lemmatu 10 a z komentáře k němu.
- 2) Uvažujeme-li změnu informace i_J jako funkci p_J , je i_J formálně shodná s Boltzmannovou i Shannonovou entropií.
- 3) Její derivace, hustota, je podle věty 11 Parzenovým jádrem využitelným pro neparametrické odhadování hustoty pravděpodobnosti a její distribuční funkce.
- 4) Určuje - jako pravděpodobnost - zobecněnou informační entropii.
- 5) I její derivace, hustota dat, je podle (3.9.2-12) se zobecněnou entropií úzce spjata.

Až dosud jsme komentovali zejména vlastnosti reálné funkce p_J . Její protějšek p_I je ale funkcí komplexní, funkce p_I a $1-p_I$ jsou komplexně sdružené. Proto je již zmíněná zobecněná entropie pro $P=p_I$ reálná, rovná $(1+h_J^2)/4=f_J^2/4$. Váha f_J je tedy úměrná modulu funkce p_I (argumentu funkce i_I hodnotící estimační změnu informace), je odmocninou ze zobecněné informační entropie, a přitom podle (3.8.3-6) určuje kvantifikační změnu termodynamické entropie. Poznamenejme, že vlnová funkce v kvantové mechanice je rovněž komplexní a že pravděpodobnostní interpretaci má její modul. Hledání možných souvislostí by však daleko překročilo rámeček této práce.

3.9.3 Motivace pro informační interpretaci gnostických funkcí

Vraťme se nyní k důvodům, které opravňují přijetí funkcí i_G za

změny informace. K rozboru vlastností spojovaných s pojmem informace v užším (řekněme "exaktním") smyslu použijeme (náš) souhrn myšlenek uvedených v [18]:

- 1) Pod teorií informace se rozumí věda snažící se proniknout do pojmu zpráva, abstrahující od různých fyzikálních forem zprávy (signálu) a směřující k omezení rušivých vlivů (šumů), které zprávu znehodnocují.
- 2) Pojem zpráva předpokládá interakci dvou systémů, např. pozorovaného systému a "pozorovatele" či jeho měřicího přístroje.
- 3) Tato interakce se projevuje jednak vzájemnou výměnou energie a jednak změnou stavu systémů.
- 4) Změny stavu systémů lze popsat specifikací energetické bilance a úplné bilance změn entropie a jejího dvojníka, informace.
- 5) Základním aspektem pojmu zprávy je věrnost, s jakou jsou stavy systému, který je zdrojem zprávy, odráženy nebo registrovány přijímajícím systémem.
- 6) Obecně entropie celého systému (tj. pozorovaného systému a pozorovatele) vzrůstá v průběhu pozorování, jímž se získává informace, avšak tuto informaci lze opět využít k částečnému kompenzování vzrůstu entropie celého systému.
- 7) Náhodný charakter rušivých vlivů na zprávu způsobuje, že interakce mezi systémy nelze vyjádřit jako pevnou transformaci, nýbrž jen jako podmíněnou pravděpodobnost.
- 8) K měření množství informace se použije funkce, která vyhovuje zejména těmto požadavkům:
 - a) je nezáporná,
 - b) roste se snadností rozlišení stavu zdroje zprávy a se zjemňováním popisu náhodných elementů,
 - c) minima dosahuje při stejné pravděpodobnosti všech stavů; je nulová, právě když je přijatý signál nezávislý na vyslaném,
 - d) nelze ji zvýšit žádnou měřitelnou transformací zprávy,
 - e) je aditivní.
- 9) Jako podstatný prvek kybernetiky má být informace a její teorie prakticky využitelná k dosažení cílů řízení s maxi-

málním potlačením nežádoucích náhodných vlivů a k vytváření strojů realizujících proces řízení na stále vyšší úrovni za samočinné adaptace k vlastnostem zpráv i vlivům okolí.

Práce [18] je stejně jako celý dlouhý řetěz prací jejího autora, dr.A.Pereze, DrSc., které tuto práci předcházely i následovaly, věnována naplňování uvedeného programu prostředky založenými na teorii pravděpodobnosti. O to zajímavější je porovnat tento souhrn s odlišným, gnostickým přístupem:

- 1) Zprávou je v gnostickém modelu datum, "signálem" ideální hodnota a "šumem" numerický obraz rušivé kvantitativní veličiny v abstraktním pojetí, zajištěném prvním a druhým axiomem.
- 2) Pozorovaným systémem je systém kvantitativní veličiny, interakcí s pozorovatelem je proces kvantifikace produkující datum.
- 3) Změny energie provázející kvantifikaci i estimaci se kvantitativně charakterizují v odstavci 3.8.3, což umožňuje kvantitativně ohodnotit změnu stavu systému změnou termodynamické entropie data.
- 4) K úplné bilanci entropie a informace se dospěje analýzou difúze entropie (odst.3.8.4), odvozením rovnice (3.9.1-5) a důkazem věty 10 o existenci funkce i_0 , jejíž zřídla pokrývají zřídla pole entropie.
- 5) Věrnost "přijaté zprávy" se hodnotí kvantitativně vzorcem (3.8-3), souvisí se změnou termodynamické entropie podle vzorce (3.8.3-6) a s rozložením hustoty data podle vzorce (3.9.2-12).
- 6) Vzrůst termodynamické entropie při růstu pozorovací chyby je zřejmý ze vztahu (3.8.3-6) po dosazení f_j z (3.8-1). To, že estimace může využitím informace kompenzovat vzrůst entropie jen částečně, je dokumentováno lemmatem 9. V dalším bude ještě dokázána nemožnost úplného obnovení výchozí informace data ze stavu před kvantifikací.
- 7) Podle odst.3.9.2 jsou náhodné vlivy kvantifikace charakterizovány distribuční funkcí a hustotou datové dvojice. Tyto funkce mají (mimo jiné) i interpretaci jako pravděpodobnostní distribuční funkce podmíněné daným výsledkem

kvantifikace, tj. datem (a danou hodnotou parametru měřítka).

- 8) Funkce h_C odvozená dle věty 10 má požadované vlastnosti 8a až 8e pro obě $C=J, I$ včetně invariance k transformacím zachovávajícím hodnotu $(Z/Z_0)^{2/S}$. O této funkci je navíc známo [22], že je jedinou reálnou spojitou a symetrickou funkcí pravděpodobností P_1, P_2 až P_n , která vyhovuje známé podmínce zjemňování pravděpodobnostního systému.
- 9) Praktická použitelnost výsledků gnostické teorie je dokumentována v 5. kapitole této práce. Je spjata s přirozenou robustností gnostických funkcí, charakterizujících změny informace i termodynamické entropie datových dvojic.

Lze tedy shrnout, že postup i hlavní - zatím uvedené - výsledky gnostické teorie jsou v souladu s obecným pojetím předmětu teorie informace, vyloženým již v [18]. Proto budeme informační interpretaci funkce i_C považovat za zdůvodněnou.

3.10 Ideální gnostický cyklus a jeho vlastnosti

3.10.1 Ideální a alternativní gnostický cyklus

Uvažujme datovou dvojici $\langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$ reprezentovanou kvantifikační událostí

$$u = r_J \exp(j\Phi), \quad (3.10.1-1)$$

které v bijekci ζ odpovídá estimační událost

$$\zeta(u) = r_I \exp(i\psi). \quad (3.10.1-2)$$

Přitom - jak již víme - platí vztahy

$$r_J = Z_0^{1/S}, \quad \Phi = \log(Z/Z_0)/S, \quad (3.10.1-3)$$

$$r_I = r_J \sqrt{\cosh(2\Phi)}, \quad \psi = \arctan(\tanh(\Phi)). \quad (3.10.1-4)$$

Definice 17: Budiž $D = \langle Z_0^{1/S}, \Phi \rangle$ datová dvojice, $C=J, I$. Označme

$$r_C := r_C(\tau_C(D)). \quad (3.10.1-5)$$

Trojici $\gamma(D) := \langle \gamma_J, \gamma_I, \gamma_K \rangle \Big|_D$ cest nazveme GNOSTICKÝM CYKLEM určeným datovou dvojicí D , právě když existují reálná čísla $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ tak, že platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma_J}^c \subset {}_1U_J, & \quad \text{Dom}(\gamma_J) = [t_0, t_1], & \quad \gamma_J(t_0) = r_J + 0j, & \quad \gamma_J(t_1) = \tilde{\mathcal{Z}}_J(D), \\ \mathcal{L}_{\gamma_I}^c \subset {}_1U_I, & \quad \text{Dom}(\gamma_I) = [t_1, t_2], & \quad \gamma_I(t_1) = \tilde{\mathcal{Z}}_I(D), & \quad \gamma_I(t_2) = r_I + 0i, \\ \mathcal{L}_{\gamma_K}^c \subset {}_1U_C, & \quad \text{Dom}(\gamma_K) = [t_2, t_3], & \quad \gamma_K(t_2) = r_I + 0c, & \quad \gamma_K(t_3) = r_J + 0c. \end{aligned}$$

Gnostický cyklus $\varkappa(D) := \langle \varkappa_J, \varkappa_I, \varkappa_K \rangle$ nazveme IDEÁLNÍM gnostickým cyklem (IGC), jestliže $\varkappa_C \subset_C v(D)$ a $\varkappa_K \subset_K v(D)$ (viz definici 11). Gnostický cyklus $\gamma(D)$ odlišný od IGC budeme nazývat ALTERNATIVNÍM gnostickým cyklem (AGC).

Ideální gnostický cyklus je tedy sestaven z kvantifikační cesty \varkappa_J , estimační cesty \varkappa_I a kontrakční cesty \varkappa_K . Z věty 8 víme, že tyto cesty jsou extrémálními. Nyní nás bude zajímat, jak se tyto vlastnosti promítnou do vlastností gnostických cyklů.

Na obr.3 je zobrazen příklad ideálního gnostického cyklu.

Pro další úvahy je třeba zvolit vhodnou parametrizaci gnostických cyklů:

Budiž $C \in \{J, I\}$, $Q \in \{J, I, K\}$. Pro $Q \in \{J, I\}$ budiž $C=Q$. Budiž m bijekce $\{J, I, K\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ definovaná vztahy

$$m(J) := 0, \quad m(I) := 1, \quad m(K) := 2. \quad (3.10.1-6)$$

Ve vzorcích, kde se bude společně vyskytovat $m(Q)$ i Q budeme zjednodušeně psát m místo $m(Q)$.

Budiž $\mathcal{V}_0^Q(Q, t)$ proměnná datová dvojice definovaná pro každou křivku $Q^v \subset {}_1U_C$ jako následující zobrazení:

$$(\forall t \in [t_m, t_{m+1}]) (\mathcal{V}_0^Q(Q, t) = \mathcal{Z}_C^{-1}(\gamma_Q(t))). \quad (3.10.1-7)$$

Označme pro každé $t \in [t_m, t_{m+1}]$ ve shodě s (3.7.3-1) symbolem

$$d_Q(t) := d_C(\mathcal{V}_0^Q(Q, t_m), \mathcal{V}_0^Q(Q, t), \gamma_Q) \quad (3.10.1-8)$$

poměrnou C -délku cesty γ_Q nad intervalem $[t_m, t]$.

Lemma 11: Budiž D pevná datová dvojice určující gnostický cyklus

$$\varkappa(D) \text{ dle definice 17, } \Phi = \arg_J(\tilde{\mathcal{Z}}_J(D)), \Psi = \arg_I(\tilde{\mathcal{Z}}_I(D)).$$

Pro $k=0,1,2,3$ zvolme

$$t_k := k \quad (3.10.1-9)$$

a přijmeme následující parametrizaci cest $\mathbb{X}_Q^!$, $Q=J,I,K$,

$$(t \in [0,1]) (\mathbb{X}_J^!(t) = r_J \exp(t\Phi_j)), \quad (3.10.1-10)$$

$$(t \in [1,2]) (\mathbb{X}_I^!(t) = r_I \exp((2-t)\Psi_i)), \quad (3.10.1-11)$$

$$(t \in [2,3]) (\mathbb{X}_K^!(t) = (3-t)r_I + (t-2)r_J + 0c). \quad (3.10.1-12)$$

Pak trojice cest $\langle \mathbb{X}_J^!, \mathbb{X}_I^!, \mathbb{X}_K^! \rangle$ vytváří ideální gnostický cyklus $\mathbb{X}(D)$ a pro $Q=J,I,K$ jsou poměrné C-délky $d_Q(t)$ těchto cest nad intervaly od t_m do t určeny vztahy

$$(t \in [0,1]) (d_J(t) = |t| |\Phi|), \quad (3.10.1-13)$$

$$(t \in [1,2]) (d_I(t) = (2-t) |\Psi|), \quad (3.10.1-14)$$

$$(t \in [2,3]) (d_K(t) = \log((3-t)r_I/r_J + t-2)). \quad (3.10.1-15)$$

Důkaz: Srovnáním (3.10.1-10) až (3.10.1-12) s (3.7.2-1) až (3.7.

2-3) se přesvědčíme, že všechny tři cesty jsou gnostickými cestami ve smyslu definice 11. Navíc dosazením mezních hodnot definičních intervalů do (3.10.1-10) až (3.10.1-12) a srovnáním pomocí vztahů (3.10.1-1) až (3.10.1-4) ukážeme, že tyto gnostické cesty vyhovují definici 17, a vytvářejí tudíž IGC tvaru $\mathbb{X}(D)$. Vztahy (3.10.1-13) až (3.10.1-15) dostaneme užitím věty 8 a vztahů (3.7.3-6), (3.7.3-5) a (3.7.3-10) spolu s důsledkem 8.1. ▲

Nyní můžeme přeformulovat důsledky věty 8 takto:

Důsledek 8.2: Budiž $\mathbb{X}(D) = \langle \mathbb{X}_J, \mathbb{X}_I, \mathbb{X}_K \rangle$ ideální gnostický cyklus určený datovou dvojicí D , parametrizovaný dle (3.10.1-9) až (3.10.1-12). Budiž $\mathbb{Y}(D) = \langle \mathbb{Y}_J, \mathbb{Y}_I, \mathbb{Y}_K \rangle$ jakýkoliv stejně parametrizovaný gnostický cyklus určený toutéž datovou dvojicí. V souladu s (3.7.3-3) označme $\mathcal{U}_{0J} := \mathcal{U}_J(\mathbb{X}_J, r_J/2, r_J/4, 1/2)$ okolí kvantifikační cesty $\mathbb{X}_J \subset \mathbb{X}^v(D)$.

Potom

a) je-li $\mathbb{Y}_J \in \mathcal{U}_{0J}$, pak pro všechna $t \in [0,1]$ taková, že $\mathbb{Y}_J(t) = \mathbb{X}_J(t)$

platí

$$|\dot{g}_J(t)| \leq |\dot{q}_J(t)| = t|\Phi|, \quad (3.10.1-17)$$

b) pro všechna $t \in [1, 2]$ taková, že $y_I(t) = \psi_I(t)$ platí

$$\dot{g}_I(t) \geq \dot{q}_I(t) = (2-t)|\Psi|. \quad (3.10.1-18)$$

Tato formulace je vhodná k tomu, abychom ukázali důležité vlastnosti ideálního gnostického cyklu.

3.10.2 Variační teorémy pro změny entropie a informace

Vraťme se k definici 13. Mění-li se při konstantním modulu argument párového čísla od Ω_{C_a} k Ω_{C_b} , $C=J, I$, změní se entropie podle (3.8.3-6) a (3.8.1-1) o hodnotu

$$e_{Cab} = \cosh(2C\Omega_{C_b}) - \cosh(2C\Omega_{C_a}), \quad (3.10.2-1)$$

což - díky (3.4.2-54) a označení (3.4.2-50) a (3.7.3-11) - lze zapsat i jako

$$e_{Cab} = 1/\cosh(2C'\Omega_{C',b}) - 1/\cosh(2C'\Omega_{C',a}), \quad (3.10.2-2)$$

neboli jako integrál

$$e_{Cab} = - \int_{2C'\Omega_{C',a}}^{2C'\Omega_{C',b}} \sinh(2C'\omega_{C'}) \cosh^{-2}(2C'\omega_{C'}) d(2C'\omega_{C'}). \quad (3.10.2-3)$$

Nás bude nyní zajímat vliv variace "váhy" $\cosh^{-2}(\cdot)$ na hodnoty změn entropie. Užitím (3.4.2-50) a (3.4.2-54) tedy dostaneme

$$e_{Cab} = - \int_{2C'\Omega_{C',a}}^{2C'\Omega_{C',b}} \sinh(2C'\omega_{C'}) (\cos(2\omega_I))^{-2C^2} d(2C'\omega_{C'}). \quad (3.10.2-4)$$

Uvažujme $t \in [1, 2]$, tedy estimační úsek gnostického cyklu. Dle (3.10.1-14) je zde úhel ω_I lineární funkcí t , $\omega_I(t) = (2-t)\Psi$. Vztahem (3.4.2-51) je definována vzájemně jednoznačná funkce $\omega_J(\omega_I)$, tudíž je i na uvažovaném intervalu definována funkce $\omega_J(t)$. Jsou tu definovány i poměrné I-délky $\dot{q}_I(t) = \omega_I(t)$ a $\dot{g}_I(t)$. Přiřazení bodů křivek^{k/} hodnotám $t \in [1, 2]$ je vzájemně jednoznačné. Pripusťme

nyňí možnosť volby obecné cesty γ_I . Její poměrnou I-délku $\delta_I(t)$ použijme v argumentu funkce $\cos(\cdot)$, vytvářející váhu podintegrálního výrazu. Variace cesty tak vyvolá variaci integrálu. Navíc zahrňme i případ kontrakční změny entropie, počítané obdobným způsobem. Tak přicházíme k redefinici změn entropie:

Definice 13': Za označení (3.10.1-7)-(3.10.1-8) a parametrizace

(3.10.1-9)-(3.10.1-11) budiž pro $C \in \{J, I\}$

$$\delta_C := \int_{2C'\Omega_C(1)}^{2C'\Omega_C(2)} \sinh(2C'\omega_C(t)) \cos(2\delta_I(t))^{2C'^2} d(2C'\omega_C(t)), \quad (3.10.2-5)$$

$$\delta_K = 0. \quad (3.10.2-6)$$

Je patrné, že při $\Omega_C(1) = \Omega_{C,b}$ a $\Omega_C(2) = \Omega_{C,a}$ se e_C shoduje s výrazem (3.10.2-4). Dodefinování nulové kontrakční změny δ_K je zdůvodněno tím, že změna entropie je způsobena změnou neurčitosti, tudíž i změnou úhlů, které jsou mezemi integrálu (3.10.2-5). Při kontrakci se neurčitost nemění, obě meze jsou shodné.

Důsledek 8.3: Nechť platí označení přijímaná v důsledku 8.2 a v

definici 13'. Budiž $\mathcal{U}_I(\gamma_I)$ okolí estimační cesty γ_I dle (3.7.3-2) a $\mathcal{V}_{OI} \subset \mathcal{U}_I(\gamma_I)$ množina všech cest γ_{OI} , jejichž poměrná I-délka $\delta_I(2)$ nepřevyšuje hodnotu $\pi/2 - \delta_I(2)$.

Pak pro všechny cesty $\gamma_{OI} \in \mathcal{V}_{OI}$ platí

$$a) \quad \delta_J \geq \delta_J = 1/\cos(2\Phi) - 1, \quad (3.10.2-7)$$

$$b) \quad \delta_I \geq \delta_I = \cos(2\Psi) - 1. \quad (3.10.2-8)$$

Důkaz: Rovnosti v a) i b) jsou jen přepisem výchozí rovnosti (3.

10.2-1). Zabývejme se funkcí $\cos(2\delta_I(t))$. Z důsledku 8.2 plyne pro všechna $t \in [1, 2]$ a všechny cesty $\gamma_{OI} \in \mathcal{V}_{OI}$ nerovnost

$$\cos(2\delta_{OI}(t)) \leq \cos(2\delta_I(t)), \quad (3.10.2-9)$$

jejímž užitím v (3.10.2-5) dostaneme a) i b). ▲

Uvažujme opět takové změny datové dvojice, při nichž se argument přiřazeného párového čísla mění od Ω_{Ca} do Ω_{Cb} . Tomu odpovídající změnu informace můžeme v souladu s (3.9.1-16), (3.8-7), (3.8.1-1) a (3.7.3-11) zapsat ve tvaru

$$i_{Cab} = \int_{2C\Omega_{Ca}}^{2C\Omega_{Cb}} 2C\omega_C \cosh^2(2C'\omega_C) d(2C\omega_C), \quad (3.10.2-10)$$

který je obdobou zápisu změny entropie (3.10.2-3). Jako v případě změny entropie uijeme vahovou funkci $\cos(\cdot)$, věrnost, a její převrácenou hodnotu, tutéž parametrizaci, připustíme i alternativní cesty a dodefinujeme na základě téže motivace kontrakční změny informace.

Definice 14': Za označení (3.10.1-7)-(3.10.1-8) a parametrizace (3.10.1-9)-(3.10.1-12) budiž pro $C \in \{J, I\}$

$$i_C := \int_{2C\Omega_C(1)}^{2C\Omega_C(2)} 2C\omega_C(t) (\cos(2\delta_I(t)))^{2C^2} d(2C\omega_C(t)), \quad (3.10.2-11)$$

$$i_{0K} = 0. \quad (3.10.2-12)$$

Zabývejme se opět vlivem variace cesty, tentokrát na změny informace.

Důsledek 8.4 (10.5): Nechť platí označení jako u důsledku 8.3 a v definici 14'. Pak pro všechna $t \in [1, 2]$ a všechny cesty $\gamma_I \in \mathcal{V}_{0I}$ platí

$$0 \leq i_{0J}(t) \leq i_J(t), \quad (3.10.2-13)$$

$$i_{0I}(t) \leq i_I(t) \leq 0. \quad (3.10.2-14)$$

Důkaz: Užitím (3.10.1-18) a téže úvahy, jako u důsledku 8.3. ▲

Pozastavme se u smyslu výrazů g_C (3.10.2-3) a i_C (3.10.2-11) jakožto křivkových integrálů, o jejichž variačních vlastnostech jsme se právě přesvědčili. Víme, že $2C\Omega_C$ a $\sinh(2C\Omega_C)$ jsou při $C=J, I$ obrazy neurčitosti $n \in \mathcal{N}$ ve čtyřech nám známých zobrazeních a představují čtyři způsoby hodnocení chyby data. Integrály g_C

a g_C stanovují vážený účinek těchto chyb. Snadno zde vidíme podobu s užitím proměnné váhy a kvadratického kritéria významu chyby. Je-li x chyba a hodnotíme-li její závažnost jako $x^2/2$, je to integrál diferenciálu $xqdx$, kde q je jednotková konstanta. Příkladáme-li diferenciálu $x dx$ proměnnou váhu $q(x)$, bude podintegrální výraz roven $xq(x)dx$, což se shoduje s tvarem, který mají podintegrální výrazy ve čtyřech zkoumaných případech. Roli x hrají v případě změn entropie g_C proměnné $2C'\omega_C(t)$, vahami jsou pak kladné funkce

$$g_{eC} := \frac{\sinh(2C'\omega_C(t))}{2C'\omega_C(t)} \cos^{2C^2}(2d_I(t)). \quad (3.10.2-15)$$

Pro změnu informace je chybou $2C\omega_C(t)$ a vahou kladná funkce

$$g_{iC} := \cos^{2C^2}(2d_o(t)). \quad (3.10.2-16)$$

Všechny čtyři výrazy pro váhy konvergují při $x \rightarrow 0$ k jedničce, což odpovídá hodnocení chyby podle jejího čtverce. Při silných chybách se však každá z vah chová zcela odlišně. Později se přesvědčíme, že jejich proměnnost dodává hodnocení chyb robustní povahu, buď se potlačuje vliv slabých, nebo silných chyb. Podobně se chovají funkce, používané k hodnocení vlivu chyb v robustní statistické teorii, např. v případě tzv. M-odhadů parametru polohy výběru [24]. Průběh těchto funkcí určuje důležitou charakteristiku metody, influenční křivku. Uvedená čtveřice gnostických vah a jim odpovídajících influenčních křivek je pozoruhodná jak tím, že je zde teoreticky zdůvodněným výsledkem a má významné interpretace (změny entropie a informace), tak i tím, že uvedené teoretické konstrukci dodává zajímavé variační vlastnosti: hodnotíme-li změny entropie a informace křivkovými integrály branými podél estimační cesty, dochází k extremalizaci těchto charakteristik neurčitosti. Uvidíme, že se tak odhaduje spodní hranice neodstranitelných škod, které způsobila neurčitost u data.

Takto tedy lze ideální gnostický cyklus využít jako teoretický návod k nejlepšímu postupu při estimaci a současně ke stanovení

teoretických mezí přesnosti zpracování neurčitých dat.

3.10.3 Rezidua entropie a informace

Definice 18: Mějme gnostický cyklus $\gamma(D) = \langle \gamma_J, \gamma_I, \gamma_K \rangle$ určený datovou dvojicí $D = \langle Z_o^{1/S}, \Phi \rangle$, parametrizovaný dle (3.10.2-9) až (3.10.2-12).

REZIDUEM ENTROPIE $Ren_o(D)$ gnostického cyklu $\gamma(D)$ nazveme součet změn entropie přiřazených jeho cestám definicí 13', tj.

$$Ren_o(D) := e_J(1) + e_I(2) + e_K(3). \quad (3.10.3-1)$$

REZIDUEM INFORMACE $Rin_o(D)$ tohoto gnostického cyklu nazveme součet změn informace přiřazených jeho cestám definicí 14':

$$Rin_o(D) := i_J(1) + i_I(2) + i_K(3). \quad (3.10.3-2)$$

Tyto pojmy nám poslouží ke shrnutí získaných poznatků o ideálním gnostickém cyklu.

Věta 12: Budiž $\gamma(D)$ gnostický cyklus určený datovou dvojicí

$D = \langle Z_o^{1/S}, \Phi \rangle$ a $\varkappa(D)$ příslušný ideální gnostický cyklus. Nechť platí označení dle důsledků 8.2 až 8.4. Pak pro všechny datové dvojice D , pro něž $\Phi \neq 0$, a pro všechny cesty $\gamma_{OI} \in \mathcal{V}_{OI}$ platí

a) $Ren_*(D) = 1/\cosh(2\Phi) + \cosh(2\Phi) - 2 > 0, \quad (3.10.3-3)$

b) $Rin_*(D) = 2\Phi \tanh(2\Phi) - \arctan(\sinh(2\Phi)) \sinh(2\Phi) < 0, \quad (3.10.3-4)$

c) $Ren_o(D) \geq Ren_*(D), \quad (3.10.3-5)$

d) $Rin_o(D) \leq Rin_*(D). \quad (3.10.3-6)$

Důkaz: Tvrzení a) jsme již dokazovali jako lemma 9, neboť kontrakční změna entropie je dle (3.10.2-6) nulová. Nulová je i kontrakční změna informace, proto b) dostaneme jako součet (3.9.1-14) a (3.9.1-15). Obě rezidua by byla nulová při $\Phi = 0$, takový triviální gnostický cyklus není ale větou uvažován. K důkazu zápornosti rezidua informace zderivujeme (3.10.3-4) podle 2Φ a dostaneme

$$\frac{dRin_*(D)}{d(2\Phi)} = 2(\Phi/\cosh^2(2\Phi) - \Psi \cosh(2\Phi)). \quad (3.10.3-7)$$

Lze dokázat [2], že pro $\Phi \neq \Psi$ plyne z rovnosti $\tan(\Psi) = \tanh(\Phi)$ kromě $\text{sign}(\Psi) = \text{sign}(\Phi)$ také $|\Psi| > |\Phi| / \cosh(2\Phi)$. Derivace rezidua informace má proto opačné znaménko než úhel Φ a byla by nulová při $\Phi = 0$, stejně jako reziduum, to je tedy záporné pro všechny nenulové hodnoty Φ .

Nemožnost snížit (kladné) reziduum entropie variací estimační cesty plyne z důsledku 8.3, a nemožnost zvýšit (záporné) reziduum informace z důsledku 8.4.

▲
Snížení kvality dat způsobené neurčitostí (měřené zvýšením entropie a ztrátou informace) nelze tedy ani v ideálním případě nejen plně odstranit, ale ani zmírnit volbou žádné z alternativ estimačního úseku ideálního gnostického cyklu. Neodstranitelné poškození dat se monotónně zhoršuje s růstem neurčitosti, chyby $|\Phi|$, jak je patrné z uvedených vztahů.

Důsledek 12.1: Za podmínek věty 12 platí

$$\text{Ren}_*(D) = 4\Phi^4 + o(\Phi^6). \quad (3.10.3-8)$$

$$\text{Rin}_*(D) = -16\Phi^4/3 + o(\Phi^6). \quad (3.10.3-9)$$

Důkaz: Rozkladem funkcí do Taylorova polynomu.

▲
Při slabých poruchách dat (a pouze za této podmínky) lze nenulovost reziduí entropie a informace zanedbat. Za této podmínky se změny entropie i informace (jak je patrné z důsledku 10.5, lemmatu 8 a z (3.8.3-6)) chovají jako kvadratické funkce, které se vzájemně kompenzují. Nevratnost změn entropie a informace se projeví až při silných chybách. Tento výsledek gnostické teorie dat má nejen kvantitativní, ale i principiální povahu.

3.10.4 Optimalita estimační cesty

Nyní lze tedy shrnout důvody pro ztotožnění estimačního modelu s komplexní verzí okruhu párových čísel:

- 1) Podle důsledku 5.2 vyhovuje přirozeným a zdůvodnitelným požadavkům axiому 2 pouze gnostický (párový) operátor, který má právě dvě verze, dvojitou a komplexní.
- 2) Struktura komplexních čísel \mathcal{G}_I má podle souhrnu uvedeného v

odst.3.6.4 řadu formálně matematických vlastností, které z ní činí jedinečný duál ke struktuře dvojitych čísel \mathcal{J} , což je jedinečný model dat ve smyslu věty 7.

- 3) Estimační (eukleidovská) kruhová cesta je podle věty 8 extrémálou s minimální poměrnou délkou.
- 4) Gradienty polí entropie, vah i irrelevancí dat jsou podle věty 9 kolineární s tečnou k této estimační cestě.
- 5) Estimační cesta umožňuje podle důsledku 8.3 a věty 12 uzavřít gnostický cyklus tak, aby výsledná entropie byla snížena na teoretické minimum.
- 6) Podle věty 10 existuje kromě duality obou struktur párových čísel i jejich inherentní vzájemnost, diktující výběr estimační cesty jako extrémály, která podle důsledku 8.4 a věty 12 umožňuje uzavřít gnostický cyklus tak, aby celkové informační ztráty byly sníženy na dosažitelné minimum.

3.10.5 Ideálnost gnostického cyklu

Pozastavme se u důvodů pro pojmenování cyklu γ ideálním:

- 1) Tento cyklus reálně neexistuje, je to matematická fikce, neboť jedinou (diskrétní) číselnou hodnotu data doplňuje kontinuem "možných" spojitě nabývaných "mezihodnot", čímž je jedinečný diskrétní akt tvorby data (a jeho jednorázová číselná úprava na odhad) povýšen na uzavřený cyklus procesů podřízených matematickým zákonitostem.
- 2) Zákonitosti tohoto cyklu vyplývají z idealizovaných představ o modelu dat (axióm 1) a o gnostických operátorech (axióm 2).
- 3) Tyto zákonitosti zahrnují vzorce přiřazující ke každému datu mez možného snížení nárůstu entropie a mez možného snížení ztrát informace při odhadování, které by probíhalo v ideálních podmínkách.
- 4) Tyto meze jsou při odhadování prakticky nedosažitelné, neboť jejich dosažení je podmíněno přesnou znalostí ideální hodnoty data, ta je však jen cílem, nikoliv výsledkem odhadování, který vždy obsahuje neodstranitelnou část chyby.
- 5) Zákonitosti tohoto cyklu jsou prakticky využitelné k odhadování; je to ideál, podle něhož lze konstruovat algo-

řítmý reálného suboptimálního zpracování neurčitých dat. Příklady využití zákonitostí ideálního gnostického cyklu budou uvedeny níže.

3.11 Izomorfismus gnostického a fyzikálního modelu jevů

3.11.1 Relativistická struktura

Definice 18: Budiž m_0 klidová hustota oblaku H nekonečně jemně rozptýleného hmotného prachu, který nenese elektrické náboje a nachází se v prostoru bez silových polí [23]. Označme W konstantní relativní rychlost oblaku H vzhledem k nějakému dvojrozměrnému prostoročasovému souřadnicovému systému, měřenou v jednotkách rychlosti světla (tj. platí $-1 < W < 1$). Označme rovněž

$$\Theta^0 := (1-W^2)^{1/2}, \quad \Theta^1 := W\Theta^0, \quad (3.11.1-1)$$

$$\underline{E}(m_0, W) := \begin{pmatrix} m_0 \Theta^0 \Theta^0 & m_0 \Theta^0 \Theta^1 \\ m_0 \Theta^1 \Theta^0 & m_0 \Theta^1 \Theta^1 \end{pmatrix}. \quad (3.11.1-2)$$

Budiž \underline{g}_J matice (3.4.2-1) pro $C=J$. Z matic

$$\underline{H}(m_0, W) := 2\underline{E}(m_0, W) - \underline{g}_J \underline{E}(m_0, 0) \quad (3.11.1-3)$$

vytvořme množinu

$$\mathcal{M}_H := \left\{ \underline{H}(m_0, W) \mid m_0 \in \mathbb{R}_+, W \in (-1, 1) \right\}. \quad (3.11.1-4)$$

Budiž \times operace násobení matic. Strukturu

$$\mathcal{G}_H := \langle \mathcal{M}_H, \times \rangle \quad (3.11.1-5)$$

nazveme RELATIVISTICKOU STRUKTUROU.

Je známo [11], že matice $\underline{E}(m_0, W)$ je maticovou reprezentací tenzoru energie-hybnosti oblaku H v pojetí speciální teorie relativity. Užitím dvojrozměrného (prostoročasového) popisu vymezujeme třídy čtyřrozměrných prostoročasových událostí, které mají stejný vztah odmocniny ze součtu čtverců tří prostorových souřadnic k časové souřadnici. Relativistická struktura formálně shrnuje obrazy hmotných oblaků, zobrazené v souřadnicových soustavách pohybujících se různými rychlostmi. Přijatá zobrazení umožňují ukázat důležitou souvislost mezi gnostickou teorií neurčitých dat a relativistickou mechanikou.

3.11.2 Mezivědní izomorfismus

Věta 13: Budiž \mathcal{F}_r relativistická struktura (3.11.1-5). Budiž \mathcal{F}_m struktura (3.3-4) matic $\underline{M}(A_0/S, \Phi)$ reprezentujících datové dvojice $d \in \mathcal{R}$. Pak platí, že struktury \mathcal{F}_r a \mathcal{F}_m jsou izomorfní.

Důkaz: Dosazením vztahů

$$m_0 = \exp(2A_0/S), \quad (3.11.2-1)$$

$$W = \tanh(\Phi) \quad (3.11.2-2)$$

do (3.11.1-3) a užitím vztahů (3.3-2), (3.3-1) a (3.1-13) dostaneme rovnost

$$\underline{H}(m_0, W) = \underline{M}(2A_0/S, 2\Phi), \quad (3.11.2-3)$$

čímž se ztotožní nosiče struktur \mathcal{F}_r a \mathcal{F}_m a tím i struktury, neboť strukturní operace jsou shodné. ▲

Gnostická struktura \mathcal{F}_m byla v odst. 3.3 odvozena z prvního axiómu jako model možných neurčitých dat. Relativistickou strukturu jsme vytvořili z tenzorů energie-hybnosti. Ty se ve fyzice odvozují ze zcela jiných axiómů, které zobecňují zkušenosti získané experimenty (nezávislost rychlosti šíření světla na relativní rychlosti zdroje vzhledem k pozorovateli a neměnnost formy přírodních zákonů při záměně souřadnicových systémů pohybujících se konstantní rychlostí). Data studovaná gnostickou teorií a zpracovávaná jejími algoritmy mohou pocházet ze zcela odlišných vědních oborů a charakterizovat procesy mající s fyzikou málo společného. Přesto jsme zjistili hlubokou vnitřní souvislost tak odlehlých jevů. Ta je důsledkem toho, že tyto jevy jsou podřízeny téže geometrii, geometrii Minkowského. Význam právě ukázaného izomorfismu matematických modelů jevů ze dvou tak odlišných vědních oborů spočívá v tom, že významně motivuje kompoziční zákon pro skládání neurčitých dat.

4 GNOSTICKÁ TEORIE SOUBORŮ NEURČITÝCH DAT

Tato kapitola se zabývá skládáním neurčitých dat a z něho vyplývajícími číselnými charakteristikami neurčitosti datových souborů, jakož i distribučními funkcemi a hustotami dat a jejich zá-

kladními vlastnostmi.

4.1 Kompoziční zákon neurčitých dat

Nyní máme model jednotlivých neurčitých dat a známe zákonitosti, které jsou tomuto modelu vlastní. Víme, že data plně neurčují svůj rozklad na ideální hodnotu a obraz rušivé kvantity a očekáváme, že využitím několika dat zobrazujících tutéž ideální hodnotu se nám podaří snížit vlivy neurčitosti tím, že se příspěvky neurčitosti vzájemně - alespoň částečně - vykompenzují. To se ovšem může stát až po složení dat. V předchozím jsme se přesvědčili, že zdánlivě triviální otázka "jak měřit chybu způsobenou neurčitostí" posloužila jako podnět k poměrně rozsáhlé analýze s nečekanými a obsažnými výsledky. O nutnosti skládání neurčitých dat není pochyb. Zastavme se však u otázky, jak a proč právě tak skládat data, jejich chyby a charakteristiky těchto chyb.

4.1.1 Motivace aditivního skládání chyb dat a jejich čtverců

Při malých rychlostech W se relativistický model jevů sblíží s modelem "klasické" mechaniky Galileiho a Newtonovy. V "klasicko-mechanické" verzi věty 13 by se pak zobrazil gnostický model dat s malými chybami $|\Phi|$ na svůj "limitní" případ, nejjednodušší statistický model. Pak by se chyba a její čtverec (aproximace irrelevance a odchylky gnostické váhy od jedničky při slabých chybách) zobrazily na veličiny $m_0 W$ a $m_0 W^2$. Takovou souvislost mezi mechanikou a statistikou bychom pak mohli vyložit takto:

Uvažuje se N -tice hmotných bodů o stejné hmotnosti, pohybující se rovnoměrně a přímočaře různými rychlostmi W_i v prostoru bez silových polí. V rámci klasické mechaniky hmotnost na rychlosti nezávisí, proto ji přijmeme za jednotkovou, takže hybnosti hmotných bodů budou rovněž W_i . Ty zobrazíme na neurčitá data, která se mají skládat. Kinetické energie bodů jsou úměrné W_i^2 . Mechanika uznává za nepochybné a experimentálně ověřené, že hybnost a energie celého systému je součtem hybností a energií jednotlivých hmotných bodů. Kdyby měl být celý systém nahrazen jediným "ekvivalentním" hmotným bodem majícím celkovou hmotnost N , musel by mít rychlost rovnou průměru rychlostí všech bodů, a kdyby měl mít tutéž kinetickou energii, musel by mít rychlost

rovnou odmocnině z průměru čtverců rychlostí jednotlivých bodů. Průměrná rychlost je však rychlostí těžiště systému. Zobrazení jednotlivých hybností na jednotlivá data tedy indukuje zobrazení rychlosti těžiště systému hmotných bodů na aritmetický průměr dat a zobrazení kinetické energie těžiště na středněkvadratickou odchylku dat od jejich průměru. Uvažujeme-li pak rotační pohyb systému hmotných bodů kolem pevné osy, zjišťujeme, že kovarianční matice dat je obrazem tenzoru setrvačnosti systému hmotných bodů.

Z takového hlediska má tak dlouho a tak často užívané aditivní skládání dat a aditivní skládání čtverců dat a čtverců odchylek od průměru motivaci vycházející z fundamentálního přírodního zákona zachování energie a hybnosti. Je možné, že tato "mechanická" motivace vešla do základů statistiky (současně se svým ještě hlubším základem, eukleidovským geometrickým názorem) díky "personální unii" tvůrců tehdejší přírodní filozofie, zahrnující jak mechaniku, tak i statistiku. Zmíněné "fyzikální" zdůvodnění má výhodu v tom, že je použitelné pro jakkoliv malé soubory dat.

Je tu však závažná potíž: Na rozdíl od tvůrců základů statistiky již víme, že klasická mechanika platí jen při malých rychlostech pohybu. Rychlosti se však zobrazily jako chyby dat, takže jednoduché aditivní skládání dat a čtverců chyb odvoláním na klasickou mechaniku zdůvodňovat nelze, jsou-li data zatížena hrubými chybami. Víme také, že - přinejmenším ve fyzice - eukleidovská geometrie není adekvátním popisem reality. Lze najít souvislosti mezi soudobou fyzikou a problémy neurčitých dat? Gnostická teorie dala kladnou odpověď v odst. 3.11 této práce, alespoň pokud jde o měření chyb jednotlivých dat. Ke gnostickému kompozičnímu zákonu přistoupíme v dalším odstavci. Nejprve je ale ještě třeba uvést dvě poznámky.

Na problematiku hrubých chyb v datech a potíže s aplikací klasických statistických postupů na malé výběry dat ze statisticky nedefinovaných základních souborů reagovala statistika intenzivním rozvojem robustních metod [24]. Lze se snadno přesvědčit,

že mnohé robustní algoritmy lze geometricky interpretovat jako zavedení specifických metrik Riemannova typu, tedy jako odklon od metrik eukleidovského typu, v nichž váha chyby nezávisí na hodnotě chyby. Tato interpretace však není běžně akceptována, geometrická podstata problému bývá zpravidla skryta pod předpoklady o rodinách distribucí, případně i pod heuristickými argumenty. Problematika kompozičního zákona neurčitých dat se odděleně nestuduje. Statistika se od svých historických zdrojů distancovala vybudováním vlastního matematického fundamentu. Snad i to je příčinou toho, že mimo pozornost zůstává její přetrvávající sepijatost s fyzikou, která je projevem jednoty světa.

Souvislostem mezi fyzikou a zejména informací byla věnována již řada prací. Uveďme zde alespoň dva autory z nejnovější doby. V roce 1975 zavedl G.A.Jumarie pojem "relativistická kybernetika" [25] a v řadě prací včetně dvou knih [26] rozvíjí svoji myšlenku o tom, že vliv subjektivních podmínek příjmu informace na hodnocení množství informace může a má být uvažován pomocí Lorentzových transformací. Z jeho prací však nevyplývá nutnost takového postupu, ani důvod pro odmítnutí podstatně jednoduššího řešení této úlohy, které v rámci metod teorie informace nabídl již dávno zavedení informačního kanálu příjemce zprávy [18]. Zcela jinak staví otázku o vztazích fyzikálních a informačních zákonitostí jevů F.W.Kantor ve své knize [27], kde hodnotí s využitím prostředků matematické fyziky transformace informace (definované počtem bitů charakterizujících fyzikální veličinu), doprovázející fyzikální transformace. Zmíněné práce se podstatně liší od gnostického přístupu svými východisky, metodami i výsledky, ale i tím, že si nekladou za cíl zpracování neurčitých dat.

4.1.2 Gnostický kompoziční zákon

V teorii jednotlivých dat jsme každé datum $A \in \mathbb{R}^1$ (či $Z \in \mathbb{R}_+$) považovali za obraz datové dvojice $d \in \mathcal{R}$, a tu pak za rozklad data na ideální a rušivou složku. Toto přiřazení budeme mít na mysli i v dalším textu, kdy pro zjednodušení a v souladu s běžnými zvyklostmi budeme hovořit o datech a datových souborech a jejich

charakteristikách, nikoliv o souborech datových dvojic. Ve zvláštním případě datových dvojic s nulovou rušivou složkou budeme hovořit o PŘESNÝCH datech.

Definice 19: Pro každou N -tici dat Z_1 až Z_N , zapsaných v multiplikativní formě $Z_k^{1/S} = Z_0^{1/S} \exp(\Phi_k)$ ($k=1, \dots, N$) a majících tutéž ideální hodnotu Z_0 a tentýž parametr měřítka S , označme

$$\mathcal{Z}(N, Z_0, S) := \langle Z_1, \dots, Z_N \rangle. \quad (4.1.2-1)$$

DATOVÝM SOUBOREM nazveme L -tici ($L \geq 1$)

$$\mathcal{Z}_L := \langle \mathcal{Z}(N_1, Z_{01}, S_1), \mathcal{Z}(N_2, Z_{02}, S_2), \dots, \mathcal{Z}(N_L, Z_{0L}, S_L) \rangle. \quad (4.1.2-2)$$

Datový soubor s neznámým L budeme značit \mathcal{Z} . Datový soubor \mathcal{Z}_L nazveme HOMOGENNÍM, právě když $L=1$. V tomto případě přijímáme

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(N_1, Z_{01}, S_1). \quad (4.1.2-2')$$

Nechť pro $l=1, \dots, L$ je $\langle Z_{1,1}, \dots, Z_{1,N_1} \rangle := \mathcal{Z}(N_1, Z_{01}, S_1)$. Pro

$k=1, \dots, N_1$ označme

$$Q_{1,k} := (Z_{1,k}/Z_{01})^{1/S_1}. \quad (4.1.2-3)$$

Nechť $N=N_1+\dots+N_L$. Budiž $\chi := \langle \chi_1, \chi_2, \dots \rangle$ posloupnost zobraze-

ní takových, že pro každé přirozené N je $\chi_N: R_+^N \rightarrow R^1$.

GNOSTICKOU CHARAKTERISTIKOU datového souboru \mathcal{Z}_L při daných $\langle Z_{01}, \dots, Z_{0L} \rangle$ a $\langle S_1, \dots, S_L \rangle$ nazveme hodnotu výrazu

$$\chi_N(Q_{1,1}, \dots, Q_{1,N_1}, \dots, Q_{L,1}, \dots, Q_{L,N_L}).$$

Gnostickou charakteristiku budeme rovněž značit $\chi_N(\mathcal{Z}_L)$.

VAHOU F_C (příp. IRRELEVANCÍ H_C) DATOVÉHO SOUBORU \mathcal{Z} nazveme funkci vah f_{Ci} (příp. irrelevancí h_{Ci} , $C=J, I$) všech dat vytvářejících soubor \mathcal{Z} .

Aby se váha a irrelevance staly gnostickými charakteristikami datového souboru, musí být tedy zadány jako funkce dat vytvářejících tento soubor, jakož i příslušných ideálních hodnot a parametrů měřítka. Zabývejme se otázkou volby takových funkcí.

Důsledek 13.1: Uvažujme N -tici hmotných oblaků H_k , $k=1, \dots, N$, majících stejnou klidovou hustotu m_0 a rychlosti W_k a odpovídající N -tici maticových reprezentací tenzorů energie-hybnosti. Pak platí, že ke každé takové N -tici hmotných oblaků existuje N -tice datových dvojic $d_k = \langle Z_0^{1/S}, \Phi_k \rangle$, $k=1, \dots, N$, takových, že

$$\sum_{k=1}^{k=N} \underline{E}(m_0, W_k) = \sum_{k=1}^{k=N} \underline{M}(2 \log(Z_0)/S, 2\Phi_k). \quad (4.1.2-4)$$

Důkaz: Plyne z linearitě vztahu (3.11.1-3) a ztotožnění struktur \mathcal{F}_r a \mathcal{F}_m . ▲

Obě zkoumané struktury jsou definovány na množinách matic; proto je pro jejich prvky formálně definováno i sečítání. V případě matic $\underline{H}(m_0, W_k)$ má však díky vztahu (3.11.1-3) sečítání prvků hluboké fyzikální zdůvodnění, neboť součet těchto matic odpovídá součtu tenzorů energie-hybnosti, a tudíž - podle zákona zachování energie a hybnosti - i celkové energii a celkové hybnosti systému všech oblaků z uvažované N -tice. Takto je určen fyzikální kompoziční zákon. Uznání mezivědního izomorfismu doloženého větou 13 tak implikuje kompoziční zákon i pro N -tici gnostických (kvantifikačních) událostí: vynásobením (3.11.2-4) maticí $\underline{E}(m_0, 0)$ a užitím vztahů (3.11.2-1) a (3.1-13) se přesvědčíme, že takto vyplývá ze zákona energie a hybnosti nutnost aditivního skládání matic $\underline{M}(0, 2\Phi_k)$, neboli aditivního skládání kvantifikačních vah jednotlivých gnostických událostí i aditivního skládání jejich kvantifikačních irrelevancí, neboť z (3.3-2), (3.3-1) a (3.8.1-1) je patrné, že právě tyto funkce jsou složkami matic $\underline{M}(0, 2\Phi_k)$. Uvažovaná N -tice dat je podle definice 19 homogenním datovým souborem $\mathcal{Z}(N, Z_0, S)$. Důsledek 13.1 tedy představuje moti-

vaci volby kompozičního zákona pro takový soubor, alespoň pokud jde o jeho kvantifikační charakteristiky. Tento zákon se však opírá o mimomatematická tvrzení. Pro další využití v gnostické teorii proto přijmeme jeho zobecnění jako axióm.

Axióm 3: Budiž \mathcal{Z} datový soubor (4.1.2-2) obsahující celkem N dat s vahami f_{Ck} a irelevancemi h_{Ck} , ($C=J, I, k=1, \dots, N$). Pak pro váhu a irelevanci datového souboru \mathcal{Z} platí

$$F_C = \sum_{k=1}^{k=N} f_{Ck}/N, \quad H_C = \sum_{k=1}^{k=N} h_{Ck}/N. \quad (4.1.2-5)$$

Aditivní kompoziční zákon pro váhy a irelevance tedy přijímáme i pro případ nehomogenních datových souborů, a nejen pro kvantifikaci ($C=J$), ale i pro estimaci. Jako motivaci rozšíření tohoto zákona i na estimaci lze uvést toto: Zobrazení η (3.4.1-16) způsobuje, že estimační verze vzorců gnostické teorie dat lze získat z kvantifikačních užitím pravidla "užij 'I' místo 'J', ostatní ponech". Přijatý axióm skládání zachovává platnost tohoto pravidla i pro charakteristiky datových souborů, tím se zachovává i formální matematická jednota teorie.

Stojí za to poznamenat, že věta 13 a její důsledek jsou více než pouhá motivace pro volbu axiómu. Kdybychom pro skládání kvantifikačních událostí zvolili jiný kompoziční zákon, mohl by uvedený myšlenkový experiment posloužit jako protipříklad pro odhalení sporu. Pokud jde o kvantifikaci, je tedy axióm 3 matematickou formalizací mimomatematických skutečností a jejich uznáním.

Přijali jsme tedy kompoziční zákon, který je aditivní vzhledem k vahám a irelevancím dat. Při silném vlivu neurčitosti tento zákon skládá data a jejich čtverce způsobem značně odlišným od aditivního skládání. V dalším se ukáže, že pro praktické využití při zpracování neurčitých dat lze přijatým kompozičním zákonem motivovat i další způsoby skládání, ty se budou navzájem lišit typem a stupněm robustnosti výsledků.

4.2 Index datového souboru

Z přijatého způsobu skládání vyplývají další důležité charakteristiky datového souboru.

Definice 20: Budiž C, J, I . Budiž \mathcal{Z} datový soubor s vahou F_C a irrelevantností H_C . Budiž

$$\Omega_{ZC} := -\frac{1}{2C} \operatorname{arctanh}(CH_C/F_C). \quad (4.2-1)$$

EKVIVALENTEM datového souboru \mathcal{Z} nazveme párové číslo

$$u_Z := \exp(c\Omega_{ZC}). \quad (4.2-2)$$

Za váhu a irrelevantnost ekvivalentu u_Z přijmeme párová čísla

$$f_{ZC} := \cosh(2C\Omega_{ZC}), \quad h_{ZC} := C^{-1} \sinh(2C\Omega_{ZC}). \quad (4.2-3)$$

INDEXEM I_{ZC} datového souboru nazveme poměr

$$I_{ZC} = F_C/f_{ZC}. \quad (4.2-4)$$

Lze ověřit, že definice (4.2-1) je korektní. Je patrné, že jak párové číslo

$$E_{ZC} := F_C + H_C c, \quad (4.2-5)$$

tak i ekvivalent datového souboru charakterizují celkovou neurčitost dat, která tento soubor vytvářejí. Obě tato párová čísla "reprezentují" celý soubor, každé však v jiném smyslu. Ekvivalent datového souboru je normalizován, má jednotkový modul. Je to tedy operátor otáčení o úhel Ω_{ZC} , který je výsledkem skládání argumentů všech skládaných gnostických událostí. Párové číslo E_{ZC} má tentýž argument, jak je patrné z (4.2-1), avšak jeho modul se může lišit od jedničky.

Věta 14: Buďte \mathcal{Z} datový soubor obsahující data Z_1 až Z_N a d_1 až d_N odpovídající datové dvojice. Pro $k=1, \dots, N$ označme

$$u_k := \tau_C(d_k), \quad \Omega_{Ck} := \arg_C(\tau_C(d_k)), \quad (4.2-6)$$

$$\Phi_k := \Omega_{Jk}, \quad \Psi_k := \Omega_{Ik}. \quad (4.2-7)$$

Pak pro index I_{ZC} datového souboru platí

a) Je roven

$$I_{ZC} := \sqrt{F_C^2 - C^2 H_C^2}. \quad (4.2-8)$$

b) Je roven modulu aritmetického průměru párových operátorů otáčení o úhly rovné dvojnásobným argumentům, tj.

$$I_{ZC} = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} \exp(2c\Omega_{Ck}) \right|_C. \quad (4.2-9)$$

c) Index lze zapsat jako geometrický průměr aritmetických průměrů

$$I_{ZC} = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} u_k / \bar{u}_k \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{u}_k / u_k \right)}. \quad (4.2-10)$$

d) Lze ho zapsat i ve tvaru

$$I_{ZC} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k, l=1}^N \cosh(2C(\Omega_{Ck} - \Omega_{Cl}))}, \quad (4.2-11)$$

e) Mají-li všechny podsoubory souboru dat \mathcal{L} tutéž ideální hodnotu Z_0 a tentýž parametr měřítka S , lze index zapsat jako

$$I_{ZC} = \sqrt{1 + \frac{-C^2}{N^2} \sum_{k>1}^N (f_{Ik} f_{Il})^{(1-C^2)/2} ((Z_k/Z_1)^{1/S} - (Z_1/Z_k)^{1/S})^2}, \quad (4.2-12)$$

kde pro $k=1, \dots, N$ je $f_{Ik} = f_I(u_k)$, tj.

$$f_{Ik} = 2 / ((Z_k/Z_0)^{2/S} + (Z_0/Z_k)^{2/S}). \quad (4.2-13)$$

Důkaz: Z (4.2-1) a (4.2-3) plyne

$$h_{ZC} / f_{ZC} = H_C / F_C. \quad (4.2-14)$$

Podle (4.2-4) je proto

$$f_{ZC} = F_C / I_{ZC}, \quad h_{ZC} = H_C / I_{ZC}, \quad (4.2-15)$$

přičemž F_{ZC} i f_{ZC} jsou kladná, platí tedy a). Index I_{ZC} je tudíž modulem párového čísla E_{ZC} (4.2-5), které je podle (4.1.2-4) průměrem párových čísel tvaru $f_{Ck} + h_{Ck}c$, což jsou podle lemmatu 7 operátory $\exp(2C\Omega_{Ck})$, proto platí b). Body c) a d) lze dokázat z a) využitím vztahu $u_k / \bar{u}_k = \exp(c2\Omega_{Ck})$.

Ve vzorci (4.2-11) upravujeme kosinus rozdílů úhlů nejprve pro $C=J$:

$$\cosh(2(\Phi_k - \Phi_l)) = (((\exp(\Phi_k - \Phi_l))^2 + (\exp(\Phi_l - \Phi_k))^2) / 2 = \quad (4.2-16)$$

$$1 + (\exp(\Phi_k - \Phi_l) - 1 / \exp(\Phi_k - \Phi_l))^2 / 2 = 1 + ((Z_k/Z_1)^{1/S} - (Z_1/Z_k)^{1/S})^2 / 2,$$

přičemž poslední substituce vyplývá z (3.1-12). Dosazením do

(4.2-11) dostaneme kvantifikační verzi indexu v (4.2-12). Vztah (4.2-13) plyne z lemmatu 6. Dosazením z (3.4.2-51)-(3.4.2-54) dostáváme

$$\cos(2(\psi_k - \psi_l)) = \cos(2\psi_k)\cos(2\psi_l) + \sin(2\psi_k)\sin(2\psi_l) = \quad (4.2-17)$$

$$(f_{I_k} f_{I_l})(1 + \sinh(2\phi_k)\sinh(2\phi_l)) = 1 + (f_{I_k} f_{I_l})(1 - \cosh(2(\phi_k - \phi_l))),$$

takže užitím (4.2-16) a (4.2-11) dostaneme estimační verzi indexu. Vzorec (4.2-12) pak formálně slučuje oba případy.

Z bodu e) je patrné, že index je gnostickou charakteristikou datového souboru \mathcal{L} .

Důsledek 14.1: Pro indexy datového souboru \mathcal{L} platí

$$0 < I_{ZI} \leq 1 \leq I_{ZJ} < \infty, \quad (4.2-18)$$

přičemž případy $I_{ZI}=1$ a $I_{ZJ}=1$ nastávají současně, a to právě když jsou všechna data přesná.

Důkaz: Nechť jsou všechna data přesná. Uvažujme označení jako ve větě 14. Pak jsou všechny argumenty Ω_{Ck} v (4.2-11) nulové a oba indexy jsou jednotkové. Je-li jeden z indexů roven jedné, musí být nulové všechny argumenty Ω_{Ck} v (4.2-11), což lze snadno dokázat sporem. Pak ale musí být jednotkový i druhý z indexů, neboť argumenty dvojitých a komplexních čísel jsou spjaty podmínkou rovnosti tangent (3.4.2-51), data jsou tedy přesná. Nerovnosti v (4.2-18) plynou z toho, že pro všechna nenulová reálná t je $\cosh(t) > 1$ a $\cos(t) < 1$, přitom pro $t < \infty$ je i $\cosh(t) < \infty$.

Index bylo třeba zavést pro normalizaci váhy a irrelevance souboru, po níž se tyto veličiny stanou vahou a irrelevancí gnostické události, která je ekvivalentem homogenního datového souboru a může ho reprezentovat asi tak, jako může reprezentovat jediná relativistická událost soubor událostí, jestliže má energii a hybnost rovnou průměrům energií a hybností všech událostí. Pojem ekvivalentu datového souboru jsme však zavedli jen pro homogenní datové soubory. Později uvidíme, že pro nehomogenní soubory nemusí mít tento pojem dobrý smysl. Pro takové soubory lze však index používat též, i když k jiným účelům.

Z (4.2-11) vidíme, že hodnoty indexu jsou plně určeny "úhlovými vzdálenostmi" $\Omega_{Ck} - \Omega_{C1}$ každého data od každého (včetně sebe). Je patrné, že hodnoty indexů jsou spjaty s rozptýlením dat souboru. Od hodnoty 1, kterou mají indexy pouze v ideálním případě přesných dat, estimační index klesá a kvantifikační index roste se zesilováním vlivu neurčitosti. Tento způsob hodnocení množství neurčitosti dat souboru je závislý na hodnotě či hodnotách parametru měřítka a lze ho prakticky použít, až když jsme odhadli ideální hodnoty, a tím i argumenty Ω_{Ik} . Pozoruhodnou výjimkou je v tomto ohledu kvantifikační verze vzorce (4.2-6), k jejímuž použití potřebujeme jen data a parametr měřítka.

Důsledek 14.2: Buďte \mathcal{Z}' a \mathcal{Z}'' dva homogenní datové soubory s týmiž ideálními hodnotami a stejným parametrem měřítka a N' , N'' počty jejich dat. Budiž \mathcal{Z} homogenní datový soubor vytvořený konkatencí souborů \mathcal{Z}' a \mathcal{Z}'' . Buďte I_{ZC} , $I_{Z'C}$ a $I_{Z''C}$ indexy homogenních datových podsouborů \mathcal{Z} , \mathcal{Z}' a \mathcal{Z}'' .

Pak platí rovnost

$$I_{ZC}^2 = (N'/(N'+N''))^2 I_{Z'C}^2 + (N''/(N'+N''))^2 I_{Z''C}^2 + 2 \sum_{k=N'+1}^{N'+N''} \sum_{l=1}^{N'} \cosh(2C(\Omega_{Ck} - \Omega_{Cl})) / (N'+N'')^2 \quad (4.2-19)$$

a systém nerovností

$$(N'^2 I_{Z'I}^2 + N''^2 I_{Z''I}^2)^{1/2} \leq (N'+N'') I_{ZI} \leq (N' I_{Z'I} + N'' I_{Z''I}) \leq (N'+N'') \leq (N' I_{Z'J} + N'' I_{Z''J}) \leq (N'+N'') I_{ZJ}. \quad (4.2-20)$$

Důkaz: Dosazením konkatenaného souboru do (4.2-11) a využitím vlastností funkcí $\cosh(\cdot)$ a $\cos(\cdot)$.

▲

4.3 Vlastnosti gnostických charakteristik datového souboru

4.3.1 Aditivita gnostických charakteristik

Jestliže pro $(k=1, \dots, N)$ jsou Q_k reálná čísla, pak symbolem \bar{Q}_k , příp. \bar{Q} , označíme jejich aritmetický průměr, tj.

$$\bar{Q} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Q_k. \quad (4.3.1-1)$$

Tuto symboliku budeme od již užívaného značení sdružených párových čísel odlišovat dle kontextu.

Definice 21: Budiž $C=J, I$. Budiž \mathcal{Z} datový soubor s daty Z_1, \dots, Z_N .

Nechť Ω_{C1} až Ω_{CN} mají stejný význam jako ve větě 14.

Pak pro každé $K=1, \dots, N-1$ definujme

$$\text{cov}_C(N, K) := \frac{1}{N-K} \sum_{l=1}^{N-K} h_C(2C\Omega_{C, l}) h_C(2C\Omega_{C, l+K}). \quad (4.3.1-2)$$

Lemma 13: Pro index datového souboru \mathcal{Z} dle definice 20 platí (4.3.1-3)

$$I_{ZC} = \sqrt{(\bar{f}_C)^2 - (C^2/N) \left((\bar{h}_C^2) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (1-k/N) \text{cov}_C(N, k) \right)}.$$

Důkaz: Rozepsáním průměru irrelevancí v (4.2-2) s užitím symbolů dle definice 21.

Povšimněme si, jakou interpretaci mohou mít zatím zavedené gnostické charakteristiky při slabých poruchách dat: ▲

Lemma 14: Nechť \mathcal{Z} , $\bar{\Phi}_1$ až $\bar{\Phi}_N$ mají týž význam jako ve větě 14.

Nechť

$$\Delta := \text{Max}_k(|\bar{\Phi}_k|). \quad (4.3.1-4)$$

Pak pro následující gnostické charakteristiky souboru platí při $\Delta \rightarrow 0$ vztahy:

$$\bar{h}_C/2 = \bar{\Phi} + o(\Delta^3), \quad (4.3.1-5)$$

$$\bar{e}_C/2 = (\bar{f}_C - 1)/2 = C^2 \bar{\Phi}^2 + o(\Delta^4), \quad (4.3.1-6)$$

$$\bar{h}_C^2/4 = \bar{\Phi}^2 + o(\Delta^4), \quad (4.3.1-7)$$

$$(\overline{f_C^2} - 1)/4 = C^2 \overline{\Phi^2} + O(\Delta^4), \quad (4.3.1-8)$$

$$\text{cov}_C(N, k) = \frac{1}{N-K} \sum_{l=1}^{N-K} \Phi_l \Phi_{l+K} + O(\Delta^4), \quad (4.3.1-9)$$

$$I_{ZC} = 1 + 2C^2(\overline{\Phi^2} - (\overline{\Phi})^2) + O(\Delta^4). \quad (4.3.1-10)$$

Již v lemmatu 8 jsme viděli, že při slabých chybách dat se irrelevance blíží k chybě a váha k jejímu kvadrátu; to je příčinou toho, že gnostické charakteristiky se za této podmínky blíží k výběrovým odhadům uvedených prvních a druhých statistických momentů, dělených parametrem měřítka. Úpravou indexu datového souboru podle lemmatu 13 se prokázal vliv gnostické charakteristiky $\text{cov}_C(N, K)$, která se dle (4.3.1-9) při slabých chybách blíží k druhému smíšenému statistickému momentu. Přijmeme ji za gnostickou charakteristiku korelovanosti dat souboru.

Do uvedeného přehledu jsme zahrnuli i průměr čtverců vah, který hraje v dalším významnou úlohu, neboť podle věty 11 a vztahu (3.4.2-54) je čtverec estimační váhy (interpretovaný jako funkce neznámé ideální hodnoty) Parzenovým jádrem a průměr těchto funkcí bude sloužit jako hustota dat.

4.3.2 Citlivost gnostických charakteristik

Definice 22: Budiž χ_1, χ_2, \dots zobrazení jako v definici 19.

Gnostickou charakteristiku χ nazveme ADITIVNÍ, jestliže pro každý datový soubor $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(N, \dots)$ s daty Z_1, \dots, Z_N a datový soubor $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z}'(N+1, \dots)$ s daty Z_1, \dots, Z_N, Z závisí rozdíl hodnot $\chi_{N+1}(\mathcal{Z}') - \chi_N(\mathcal{Z})$ pouze na datu Z , jeho parametru měřítka (S) a na jeho ideální hodnotě (Z_0). CITLIVOSTÍ gnostické charakteristiky χ nazveme reálné číslo δ takové, že pro každou takovou dvojici datových souborů \mathcal{Z} a \mathcal{Z}' platí

$$0 < \lim_{Z \rightarrow \infty} (|\chi_{N+1}(\dots, (Z/Z_0)^{1/S}) - \chi_N(\dots)| Z^{-\delta}) < \infty. \quad (4.3.2-1)$$

V gnostické teorii potřebujeme jak aditivní, tak i neaditivní charakteristiky, jako je např. již zavedený index souboru. Vý-

znam aditivity gnostických charakteristik je ve snadnosti analýzy jejich důležitých vlastností.

Lemma 15: Aditivní gnostické charakteristiky \bar{f}_C^2 , \bar{f}_C^- , \bar{h}_C^- a \bar{h}_C^2 , jakož i gnostické charakteristiky $\text{cov}_C(N, K)$ ($C=J, I$) mají následující citlivosti:

Tab.1: Citlivosti gnostických charakteristik

χ	\bar{f}_J^2	\bar{h}_J^2	\bar{f}_J^-	\bar{h}_J^-	cov_J	cov_I	\bar{h}_I^-	\bar{h}_I^2	\bar{f}_I^-	\bar{f}_I^2
χ	4/S	4/S	2/S	2/S	2/S	0	0	0	-2/S	-4/S

Důkaz: Budiž $Q=(Z/Z_0)^{1/S}$, kde Z_0 a S jsou ideální hodnota a parametr měřítka patřící k datu Z . Pak jsou přírůstky $\chi_{N+1}-\chi_N$ podle dříve uvedených vzorců rovny

pro průměr vah: $((Q^2+Q^{-2})/2)C^2/N$;

pro průměr kvantifikačních irrelevancí: $(Q^2-Q^{-2})/(2N)$;

pro průměr estimačních irrelevancí: $((Q^2-Q^{-2})/(Q^2+Q^{-2}))/N$,

pro kovariance: $((N-K)/(N+1-K)-1)\text{cov}_C(N, K)+$

$$h_{C, N+1-K} h_{C, N+1} / (N+1-K).$$

Z definice 22 a z těchto vztahů plynou uvedené citlivosti. Z definice je patrné, že citlivost je zde vztažena k odlehlému datu, tj. k datu, které se neomezeně vzdaluje od ostatních. Záporná hodnota citlivosti značí ROBUSTNOST vzhledem k odlehlému datu. Nulová citlivost svědčí o tom, že odlehlost data se může projevit jen omezenou změnou gnostické charakteristiky, zatímco robustní gnostická charakteristika se zahrnutím extrémně odlehlého data nemusí (v limitním případě) změnit vůbec. Pojem odlehlosti je zde spjat s neomezeným narůstáním data Z , avšak z uvedených vzorců je patrné, že obdobně budou gnostické charakteristiky reagovat na neomezené přibližování data Z k nule díky symetrii výrazů vzhledem ke Q .

Poznamenejme, že kladné i záporné hodnoty citlivosti mohou být

interpretovány jako robustnost gnostické charakteristiky, jestliže se přihlédne k cíli zpracování dat: Jednou jsou odlehlá data "šumem" a data "uvnitř" shluku "signálem", zatímco v jiné úloze jsou "periferní" data signálem, který je rušen "vnitřními" šumy. V prvním případě požadujeme VNĚJŠÍ ROBUSTNOST ($\delta < 0$), kdežto v druhém případě je žádoucí vlastností VNITŘNÍ ROBUSTNOST ($\delta > 0$). Jak je patrné, v gnostické teorii je snadné volit i druh, i stupeň robustnosti, ačkoliv žádné explicitní požadavky tohoto druhu nebyly přijímány. Tuto skutečnost lze označit za přirozenou robustnost gnostických charakteristik.

4.4 Gnostické distribuční funkce a hustoty datového souboru

V odstavci 3.9.2 byly jako distribuční funkce pro jednotlivá data přijaty funkce $p_J(A_0|A)$, příp. $p_J(Z_0|Z)$. Ty jsou dle (3.9.1-3) lineární funkcí estimační irrelevance. V předcházejících úvahách se nám již naskytly dvě možnosti přiřazení irrelevance datovému souboru, první je H_{ZC} dle axiomu 3 a druhá h_{ZC} (4.2-15).

Tak přicházíme ke dvěma typům distribuční funkce dat.

4.4.1 Aditivní distribuční funkce a hustota datového souboru

Definice 23: Budiž \mathcal{Z} datový soubor s daty Z_1 až Z_N . Budiž $S(k)$ parametr měřítka odpovídající datu Z_k .

Zaveďme funkce $p_{\bar{x}_k}(z): R_+ \rightarrow (0,1)$ a $p_{\bar{x}_k}(a): R^1 \rightarrow (0,1)$ takto:

$$(\forall z \in R_+) (p_{\bar{x}_k}(z) := 1 / (1 + (Z_k/z)^{4/S(k)})), \quad (4.4.1-1)$$

$$(\forall a \in R^1) (p_{\bar{x}_k}(a) := p_{\bar{x}_k}(\exp(a))). \quad (4.4.1-2)$$

ADITIVNÍMI DISTRIBUTIVNÍMI FUNKCEMI datového souboru \mathcal{Z} nazveme funkce

$$p := \bar{\bar{p}}_{\bar{x}_k}, \quad (4.4.1-3)$$

$$p := \bar{\bar{p}}_{\bar{x}_k}. \quad (4.4.1-4)$$

ADITIVNÍ HUSTOTOU datového souboru nazveme derivace aditivních distribučních funkcí podle jejich argumentu.

Důsledek 11.2: Budiž \mathcal{Z} datový soubor vytvořený z N dat Z_1, \dots, Z_N s ideální hodnotou z . Budiž $S(k)$ ($k=1, \dots, N$) parametr měřítka

příslušný pro datum Z_k . Budiž $a = \log(z)$.

Pak pro $q_k = (Z_k / \exp(a))^{2/S(k)} = (Z_k / z)^{2/S(k)}$ je

$$f_{Ik} = 2 / (q_k + 1/q_k) \quad (4.4.1-5)$$

a aditivní hustoty souboru \mathcal{Z} mají tvar

$$\dot{p} := \frac{d}{da}(p) = \overline{f_{Ik}^2 / S(k)}, \quad (4.4.1-6)$$

$$\dot{p}_x := \frac{d}{dz}(p_x) = \overline{f_{Ik}^2 / (zS(k))}. \quad (4.4.1-7)$$

Důkaz: Vztah (4.4.1-) plyne z věty 11 a z důsledku 11.1 jako aritmetický průměr přes všechna k . ▲

Pro každou pevnou hodnotu argumentu a (či z) jsou tyto distribuční funkce i hustoty aditivními gnostickými charakteristikami. Citlivost distribuční funkce je proto rovna 0 jako u estimační irrelevance, citlivost hustoty je $-4/S$ jako u čtverce věrnosti. Aditivní distribuční funkce jsou tedy omezeně citlivé k odlehlým datům (zhruba jako empirické distribuční funkce), hodnoty hustoty rovněž, avšak lokální tvary hustoty jsou vůči odlehlým datům značně robustní díky rychlému ubývání hustoty jednotlivého data se vzdalováním argumentu z od souřadnice jeho vrcholu. Z téhož důvodu se navzájem málo ovlivňují hustoty dvou od sebe odlehlých lokálních shluků. Díky aditivitě jsou příspěvky jednotlivých dat stejně vlivné, žádná data ani jejich shluky nejsou potlačována nebo preferována. Jak distribuční funkce, tak hustoty dat mají neomezenou "flexibilitu": při $S(k) \rightarrow 0$ konvergují hustoty \dot{p} i \dot{p}_x k Diracově delta-funkci. Proto se může aditivní distribuční funkce při snižování parametrů měřítka libovolně přibližovat k empirické (schodovité) distribuční funkci. Tyto vlastnosti předurčují aditivní gnostické distribuční funkce a hustoty k odhadování pravděpodobnostních distribucí a hustot datových souborů s jakýmkoliv nehomogenitami, s multimodálními hustotami apod.

4.4.2 Statistické vlastnosti aditivních gnostických distribučních funkcí

Gnostická teorie vznikla z potřeby zpracovávat malé soubory dat, která mohou být silně rušena neurčitostmi. Její použití lze očekávat zvláště za podmínek, které se obtížně charakterizují statistickými modely. Přesto je účelné - zejména pokud jsou k tomu k dispozici již hotové matematicko-statistické prostředky - posoudit i limitní statistické vlastnosti výsledků, získávaných využitím gnostických metod.

Důsledek 11.3: Buďte $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako náhodná veličina α , jejíž pravděpodobnostní distribuční funkce je absolutně spojitá a jejíž hustota pravděpodobnosti je $g(a)$. Buďte $A_k = \alpha_k$ ($k=1, \dots, N$) pozorované hodnoty, $\mathcal{L} = \langle \exp(A_1), \dots, \exp(A_k) \rangle$ homogenní datový soubor, $p(a)$ jeho aditivní distribuční funkce. Budiž $m(N)$ ($N=1, 2, 3, \dots$) posloupnost kladných reálných čísel. Definujme $g_N(a)$ vztahy

$$q(N, k) := \exp(2(A_k - a)/m(N)), \quad (4.4.2-1)$$

$$f_I(N, k) := 2/(q(N, k) + 1/q(N, k)), \quad (4.4.2-2)$$

$$g_N(a) = \frac{1}{Nm(N)} \sum_{k=1}^N f_I^2(N, k). \quad (4.4.2-3)$$

Pak platí:

a) Nechť je pro všechna $k=1, \dots, N$

$$S(k) = m(N). \quad (4.4.2-4)$$

Pak se aditivní gnostická hustota $p(a)$ (4.4.1-6) shoduje s $g_N(a)$.

b) Nechť kromě a) platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (m(N)) = 0. \quad (4.4.2-5)$$

Pak je $p(a)$ asymptoticky nestranným odhadem hustoty $g(a)$ ve všech bodech její spojitosti.

c) Nechť kromě a) a b) platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (Nm(N)) = \infty. \quad (4.4.2-6)$$

Pak je $\hat{p}(a)$ konzistentním a asymptoticky normálním odhadem hustoty $g(a)$.

d) Nechť kromě a) a b) platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (Nm^2(N)) = \infty \quad (4.4.2-7)$$

a nechť je hustota $g(a)$ stejnoměrně spojitá. Pak odhad $\hat{p}(a)$ konverguje s rostoucím N k této hustotě podle pravděpodobnosti.

e) Nechť navíc k d) platí, že \hat{A} je jediný mod hustoty $g(a)$ a že \hat{A}_N je jeho odhad získaný maximalizací funkce $\hat{p}(a)$.

Pak platí, že s rostoucím N odhad \hat{A}_N konverguje k modu \hat{A} dle pravděpodobnosti.

Důkaz: Dosazením podmínky (4.4.2-4) do (4.4.1-6) ztotožníme aditivní gnostickou hustotu (4.4.1-6) s odhadem $g_N(a)$ (4.4.2-3), neboť pro takto zadaný parametr měřítka se díky předpokladu $Z_k = \exp(A_k)$ ztotožní q_k s $q(N,k)$, a tím i f_{Ik} s $f_I(N,k)$. Platí tedy a). Pak je každý člen součtu v (4.4.2-3) podle věty 11 Parzenovým jádrem a funkce $g_N(a)$ (4.4.2-3) je odhadem hustoty $g(a)$ [19]. To umožňuje použít věty z [19] pro asymptotické případy aditivních gnostických hustot a dokázat tak jejich statistické vlastnosti b) až e).

▲
Gnostický kompoziční zákon, jehož motivace se velmi liší od statistických, se při aditivním skládání hustot a distribučních funkcí formálně ztotožnil s (asymptoticky) dobře zdůvodněným a již dlouho užívaným neparametrickým statistickým postupem. Tato dílčí shoda by dovolila aplikovat asymptotické statistické výsledky na gnostické odhady, pokud by byly splněny předpoklady o statistickém modelu dat. Gnostická teorie však odvodila své charakteristiky bez takových předpokladů, tyto charakteristiky mají dobrý smysl i pro malé soubory. Oproti Parzenovu přístupu je tu podstatný rozdíl: z gnostické teorie vyplynul jediný tvar jádra, parametrizovaný jen datem a parametrem měřítka. Je to dobře, či je to nežádoucí omezení obecnosti? Jisté je jen to, že toto je z

hlediska gnostické teorie zdůvodněný výsledek, že gnostické jádro není ve sporu s Parzenovými požadavky a že toto jádro je všude derivovatelné, což je často vítáno. Ostatní je zatím třeba ponechat dalšímu vývoji teorie a ověřování v praxi.

4.4.3 Robustnost aditivních distribučních funkcí

Zastavme se ještě u problému, který se týká celé třídy neparametrických odhadů, založených na aditivním skládání jader příslušných ^kjednotlivým datům (odhady hustot pravděpodobnosti), nebo jejich integrálů (odhady aditivních distribučních funkcí). Je to problém citlivosti k odlehlým datům.

Lemma 16: Buďte $k(a)$ Parzenovo jádro dle definice 15,

$$p(a) := \int_{-\infty}^a k(a') da', \quad (4.4.3-1)$$

z homogenní datový soubor s daty Z_1, \dots, Z_N a s parametrem měřítka S . Nechť $A_k = \log(Z_k)$ ($k=1, \dots, N$). Pro $1 \leq M < N$ a $\beta \in \mathbb{R}^1$

označme

$$p(a, N, M, \beta) := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^M p((a - A_k + \beta)/S) + \sum_{k=M+1}^N p((a - A_k)/S) \right) \quad (4.4.3-2)$$

Parzenův odhad distribuční funkce náhodné veličiny α definované v důsledku 11.3, pořizovaný z dat souboru, jejichž část je posunutá o β . Pak platí

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (p(a, N, M, +\beta) - p(a, N, M, -\beta)) = M/N. \quad (4.4.3-3)$$

Důkaz: Z vlastností Parzenova jádra plyne pro $k=1, \dots, M$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (p((a - A_k - \beta)/S)) = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} (p((a - A_k + \beta)/S)) = 1. \quad (4.4.3-4)$$

Tento výsledek platí i pro aditivní gnostickou distribuční funkci datového souboru, neboť i ta má vlastnosti Parzenových odhadů. Již v odst. 4.4.1 jsme konstatovali, že má stejně jako irrelevance souboru omezenou citlivost k odlehlým pozorováním. Právě uvedená vlastnost (4.4.3-4) je jejím důsledkem. To znamená, že vzhledem k značně odlehlým pozorováním je aditivní gnostická distribuční funkce stejně robustní jako statistické odhady této třídy. ▲

4.4.4 Globální distribuční funkce a hustota datového souboru

Definice 24: Budiž \mathcal{L} datový soubor s daty Z_1, \dots, Z_N s parametrem měřítka S a ideální hodnotou z . Buďte pro $k=1, \dots, N$

$$q_k := (Z_k/z)^{2/S}. \quad (4.4.4-1)$$

V souladu s axiómem 3 nechť jsou

$$H_I = (\overline{q_k^{-1}/q_k}) / (\overline{q_k^{-1}/q_k}), \quad F_I = \overline{2 / (\overline{q_k^{-1}/q_k})} \quad (4.4.4-2)$$

irrelevance a věrnost datového souboru \mathcal{L} a I_{ZI} jimi určený index (4.2-4). Definujme funkci $g_x^p: R_+ \rightarrow R_+$ pro každé $z \in R_+$ takto:

$$g_x^p(z) := (1 - H_I / I_{ZI}) / 2. \quad (4.4.4-3)$$

Jestliže pro každé $z \in R_+$ je derivace $\dot{g}_x^p(z)$ funkce $g_x^p(z)$ nezáporná, pak funkci $g_x^p(z)$ nazveme GLOBÁLNÍ DISTRIBUTUČNÍ FUNKCÍ datového souboru a její derivaci $\dot{g}_x^p(z)$ GLOBÁLNÍ HUSTOTOU. Je-li pro některé $z \in R_+$ derivace $\dot{g}_x^p(z)$ záporná, řekneme, že globální distribuční funkce neexistuje.

Globální distribuční funkci $g_+^p(a)$ a její hustotu $\dot{g}_+^p(a)$ zavedeme vztahem

$$(\forall a \in R^1) (g_+^p(a) := g_x^p(\exp(a))). \quad (4.4.4-4)$$

Důsledek 14.3: Nechť \mathcal{L} , Φ_1 až Φ_N mají tentýž význam, jako ve větě 14 a $\Delta := \max_k |\Phi_k|$. Pak při slabých chybách dat ($\Delta \rightarrow 0$) konverguje globální distribuční funkce k příslušné aditivní distribuční funkci.

Důkaz: Aditivní distribuční funkce (4.4.1-4) může být přepsána do tvaru $(1 - H_I)/2$, kde H_I je irrelevance (4.1.2-4) datového souboru. Pro malá Δ se index I_{ZI} dle (4.3.1-11) blíží k jedné, tudíž $g_x^p(z)$ (4.4.4-3) k $p_x(z)$ (4.4.1-3) a $g_+^p(a)$ (4.4.4-4) k $p_+(a)$ (4.4.1-4). ▲

Důsledek 14.4: Platí

$$g_x^p(z) = (Sz)^{-1} ((\overline{f_I})^2 (\overline{f_I}^2) + (\overline{f_I}) (\overline{h_I}) (\overline{f_I h_I})) / I_{ZI}^3, \quad (4.4.4-5)$$

kde f_{Ik} a h_{Ik} jsou váha a irrelevance příslušející datu Z_k a kde index I_{ZI} je z nich vypočten podle (4.2-8) a (4.1.2-4).

Důsledek 14.5: Globální distribuční funkce existuje, právě když pro každé $z \in \mathbb{R}_+$ platí

$$1 + (\bar{h}_I)(\bar{f}_I \bar{h}_I) / (\bar{f}_I \cdot \bar{f}_I^2) \geq 0. \quad (4.4.4-6)$$

Důkaz: Index souboru je kladný, podmínka (4.4.4-6) je tedy podmínkou nezápornosti derivace (4.4.4-5). ▲

4.4.5 Robustnost globální distribuční funkce

Důsledek 14.6: Budiž \mathcal{Z} datový soubor s daty Z_1, \dots, Z_N a s parametrem měřítka S , který je stejný pro všechna data. Budiž M pevné a $1 \leq M < N$. Pro každé $\beta \in \mathbb{R}^1$ a pro $Z'_k := Z_k \exp(\beta)$ ($k=1, \dots, M$) uvažujme datový soubor

$$\mathcal{Z}'_\beta = \langle Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_M, Z_{M+1}, Z_{M+2}, \dots, Z_N \rangle. \quad (4.4.5-1)$$

Označme $g_x^p(z, N, M, \beta)$ globální distribuční funkci datového souboru \mathcal{Z}'_β . Pak existuje $Z \in \mathbb{R}_+$ tak, že platí

$$\lim_{g_x} (g_x^p(Z, N, M, +\beta) - g_x^p(Z, N, M, -\beta)) = 0. \quad (4.4.5-2)$$

Důkaz: Buďte f_{Ik} , h_{Ik} věrnosti a irrelevance dat Z_k ($k=M+1, \dots, N$). Zaveďme označení

$$F_{N,M} := \sum_{k=M+1}^N f_{Ik} / N, \quad H_{N,M} := \sum_{k=M+1}^N h_{Ik} / N \quad (4.4.5-3)$$

a analyzujme funkci $g_x^p(Z, N, M, \beta)$, pro niž dle (4.4.4-3) a (4.2 8) platí

$$g_x^p(Z, N, M, \beta) = (1 - H_I(\beta)(F_I^2(\beta) + H_I^2(\beta))^{-1/2}) / 2, \quad (4.4.5-4)$$

kde $F_I(\beta)$ a $H_I(\beta)$ jsou určeny dle (4.4.4-2), přičemž pro $k=1, \dots, M$ platí $q_k = (Z'_k/z)^{2/S}$ a pro $k=M+1, \dots, N$ $q_k = (Z_k/z)^{2/S}$. Pro to platí pro $k=1, \dots, M$ (4.4.5-5)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (f_{Ik}(\beta)) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (f_{Ik}(\beta)) = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} (h_{Ik}(\beta)) = 1, \quad \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (h_{Ik}(\beta)) = -1,$$

takže

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (F_I(\beta)) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (F_I(\beta)) = F_{N,M}, \quad (4.4.5-6)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (H_I(\beta)) = H_{N,M}^+ M/N, \quad \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (H_I(\beta)) = H_{N,M}^- M/N. \quad (4.4.5-7)$$

Z (4.4.5-4) tedy plyne vztah

$$2 \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{p(z, N, M, +\beta) - p(z, N, M, -\beta)}{g^x} = \quad (4.4.5-8)$$

$$\left((F_{N,M} / (H_{N,M}^+ M/N))^2 + 1 \right)^{-1/2} - \left((F_{N,M} / (H_{N,M}^- M/N))^2 + 1 \right)^{-1/2},$$

kde $F_{N,M}$ i $H_{N,M}$ jsou funkcemi proměnné z . Analyzujeme rovnici

$$H_{N,M}(z) = 0. \quad (4.4.5-9)$$

Za přijatého označení je $h_{Ik} = (q_k - 1/q_k) / (q_k + 1/q_k)$. Funkce $H_{N,M}$ tedy při z probíhající interval $(0, \infty)$ monotónně klesá od hodnoty $(N-M-1)/N$ k hodnotě $-(N-M-1)/N$, a proto musí projít nulou v nějakém bodě Z anulujícím limitu (4.4.5-2). ▲

Snadno se přesvědčíme, že bod Z , v němž se hodnota globální distribuční funkce nezmění ani při těchto extrémních poruchách, je "uvnitř" shluku dat Z , v jeho "středu". To znamená, že alespoň střední část globální distribuční funkce je značně robustní, a to nejen k jednotlivým odlehlým datům, ale i k jejich shlukům. Jak se ještě zmíníme, zkušenost ukazuje, že - existuje-li - je globální distribuční funkce robustním odhadem dokonce i pro "periferní" hodnoty kvantilů.

Porovnáním s výsledky v lemmatu 16 zjišťujeme, že pokud jde o robustnost k odlehlým datům a periferním shlukům, překonává globální distribuční funkce kterékoliv odhady aditivního typu.

4.4.6 Ostatní vlastnosti globální distribuční funkce a hustoty

Neadditivní povaha globální distribuční funkce nedovoluje využít známé asymptotické statistické metody k posouzení statistických vlastností odhadu tohoto typu. To - spolu s příznivými vlastnostmi pro malé výběry ze základních souborů s různými pravděpodobnostními distribucemi - byl motiv k užití numerických metod, zaměřených k vyjasnění otázky o konzistenci gnostických odhadů tohoto typu. Ty naznačují [28], že funkce (4.4.4-3) je konzistentním odhadem pro soubory s log-logistickým rozložením pravděpodobnosti a že - ačkoliv pro jiná rozdělení konzis-

tentní není - jsou asymptotické chyby malé pro třídu rozdělení, jejichž hustota nemá ostré zlomy a je unimodální. Nepoužitelnost pro nehomogenní soubory je spjata s omezenou "poddajností" funkcí tohoto typu, ta však vede na druhé straně k vysoké robustnosti. Navíc umožňuje využití distribučních funkcí a hustot tohoto typu k citlivému testování homogenity (unimodality) datových souborů.

Další výhodou globální distribuční funkce je to, že její vzdálenost od empirické distribuční funkce závisí na parametru měřítka tak, že existuje netriviální minimum maxima této vzdálenosti. To umožňuje odhadovat parametr měřítka z podmínky nejlepší shody těchto dvou funkcí.

Porovnání těchto vlastností globální distribuční funkce s vlastnostmi aditivní gnostické distribuční funkce, diskutovanými v odstavci 4.4.1 a 4.4.3, ukazuje, že tyto dva typy gnostických distribučních funkcí se vzájemně doplňují. Tento závěr je podporován jak zkušenostmi z aplikací, tak i rozborem vlastností odhadů parametru polohy, odvozovaných z těchto funkcí v další kapitole.

5 TEORETICKÉ A METODICKÉ ZÁKLADY GNOTICKÝCH ALGORITMŮ

V této kapitole ukážeme, jak lze využít gnostickou teorii k přípravě metod řešení jednotlivých úloh zpracování neurčitých dat. Nejde zde o vyčerpávající přehled všech možností, nýbrž pouze o několik příkladů, které mají dokumentovat užitnou hodnotu gnostické teorie. Uvádějí se metody, s nimiž již byly získány praktické zkušenosti.

5.1 Odhadování parametru měřítka

Parametr měřítka vešel do našich úvah již při formulování prvního axiómu a provázel nás celým výkladem gnostické teorie. Už z toho lze soudit, že bude hrát významnou úlohu ve většině úloh zpracování neurčitých dat, v některých dokonce úlohu rozhodující, jako při testování hypotézy o unimodalitě souboru, nebo o počtu shluků v souboru, o šířkách intervalů spolehlivosti a

tolerančních intervalů, při kontrole stacionarity neurčitých složek dat a při dalších úlohách. Má-li být splněn účel zpracování dat, musí mu odpovídat i způsob stanovení parametru měřítka. Existuje proto mnoho aspektů, které musí být při rozhodování o parametru měřítka vzaty v úvahu. V některých úlohách je účelné parametr měřítka zadat předem (bez přihlídnutí ke konkrétním datům), jako významnou apriorní informaci, jindy je vhodné ho volit subjektivně s ohledem na již známá data, jako tomu je u dále uvedené úlohy shlukové analýzy. Z rozsáhlé problematiky parametru měřítka se zde zastavíme jen u tří objektivních metod využívajících teoretické výsledky předcházejících kapitol k odhadování parametru měřítka z dat.

5.1.1 Lokální parametr měřítka

Úloha: Dán soubor \mathcal{Z} dat Z_1, \dots, Z_N , o nichž nepředpokládáme, že patří do homogenních podsouborů s týmž parametrem měřítka. Dán bod Z . Požaduje se takový odhad parametru měřítka, aby platila rovnost

$$\int e_J(z/Z) d\mathbb{P}_X(z/Z) = \bar{e}_J(\bar{Z}_k/\bar{Z}). \quad (5.1.1-1)$$

Podmínka (5.1.1-1) zajišťuje splnění požadavku, aby se střední zvýšení ($Ee_J(\cdot)$) kvantifikační entropie (střední dle míry $\mathbb{P}_X(z/Z)$ (4.4.1-3) parametrizované hodnotami Z a $S(Z)$) rovnalo průměrnému kvantifikačnímu zvýšení $\bar{e}_J(\cdot)$ entropie jednotlivých dat vzhledem k ideální hodnotě rovné Z , stanovenému pro jednotkový parametr měřítka.

Řešení: Určením takového $S(Z) \in (0, 2)$, které vyhovuje rovnici

$$(\pi S(Z)/2) / \sin(\pi S(Z)/2) = \bar{f}_J, \quad (5.1.1-2)$$

kde \bar{f}_J je průměr kvantifikačních vah $((Z_1/Z)^2 + (Z/Z_1)^2)/2$ ($1 = 1, 2, \dots, N$). Existuje právě jedno řešení této úlohy.

Důkaz: Z (3.8.3-6) a (3.8-4) plyne, že pro jednotkový parametr měřítka je průměrné zvýšení entropie $\bar{f}_J - 1$, kde f_J má uvedený tvar. Je proto třeba dokázat, že levá strana (5.1.1-2) se rovná $1 + Ee_J(\cdot)$. Hustota pravděpodobnosti $g(z) = \mathbb{P}_X(z)$ určená

datem Z má dle věty 11 tvar (3.9.2-8), který lze po dosazení $q := (z/Z)^2$ přepsat jako

$$g(z) = 4 / ((q^{1/S} + q^{-1/S})^2 z S), \quad (5.1.1-3)$$

(kde pro jednoduchost neuvádíme u S jeho argument Z), takže

$$1 + Ee_J(z/Z) = \int_0^\infty (((z/Z)^2 + (z/Z)^{-2})/2) g(z) dz = -\frac{2}{S} \int_0^\infty \frac{dq}{(q^{1/S} + q^{-1/S})^2}. \quad (5.1.1-4)$$

Integrál na pravé straně existuje pro všechna $S > 2$ a je roven $\pi S^2 / 4 \sin(\pi S / 2)$, což vede na (5.1.1-2). Pro S rostoucí od nuly k 2 funkce na levé straně této rovnice při každém pevném Z ryze monotónně roste od jedné k nekonečnu. Pravá strana na S nezávisí a její hodnota je v závislosti na Z mezi jedničkou a nekonečnem. Jednotkové hodnotě pravé strany odpovídá limitní nulová hodnota S . V intervalu $0 < S(Z) < 2$ tedy existuje právě jedno řešení rovnice (5.1.1-2). ▲

Tento odhad označíme S_L a nazveme LOKÁLNÍM parametrem měřítka.

Lokální parametr měřítka lze tedy najít vždy, je však vždy menší než 2. Tento odhad proto není vhodný tam, kde chceme silně rozptýlený soubor interpretovat jako jediný shluk dat.

Tato metoda využívá aditivní gnostickou charakteristiku \bar{f}_J^- , jejíž citlivost je podle lemmatu 15 rovna $2/S$. U tohoto odhadu parametru měřítka lze tedy očekávat vnitřní robustnost. Pro úlohy, pro něž se požaduje vnější robustnost, se osvědčila náhrada \bar{f}_J^- v rovnici (5.1.1-2) převrácenou hodnotou gnostické charakteristiky \bar{f}_I^- .

5.1.2 Globální parametr měřítka

Označení: Buďte $F(Z)_+$ a $F(Z)_-$ limity empirické distribuční funkce zprava a zleva od hodnoty data Z . Budiž $Q(N, P)$ kvantil distribuční funkce Kolmogorov-Smirnovovy statistiky dobré shody pro výběr o rozsahu N a pro pravděpodobnost P .

Úloha: Dán homogenní datový soubor \mathcal{Z} s daty Z_1, \dots, Z_N a neznámým

parametrem měřítka S . Předpokládá se, že existuje globální distribuční funkce g_x^p (4.4.4-2) souboru \mathcal{L} . Požaduje se takový odhad S_G parametru měřítka, který zajišťuje nejlepší shodu funkce g_x^p s empirickou distribuční funkcí ve smyslu statistického testu Kolmogorova-Smirnova.

Řešení:

$$S_G = \underset{S}{\operatorname{argmin}}(\max(\max(\max(|g_x^p(S, Z_1) - F(Z_1)_-|, |g_x^p(S, Z_1) - F(Z_1)_+|))) \quad (5.1.2-1)$$

Motivace: Výraz $\max(\cdot)$ vypočítává Kolmogorov-Smirnovovu statistiku dobré shody empirické a teoretické distribuční funkce; tou je zde gnostická globální distribuční funkce. Je známo, že tato statistika je použitelná bez předpokladů o typu distribuční funkce, proto má dobrý smysl i v uvažovaném případě, pokud g_x^p existuje. Extremalizuje se však nehladká funkce a zatím není k dispozici matematický důkaz existence a jednoznačnosti řešení. Lze poukázat pouze na dobré zkušenosti s numerickým řešením, které zatím nevzbudily pochyby o použitelnosti tohoto postupu pro jakékoliv soubory, přičemž otázku, zda pro daný soubor může být g_x^p interpretována jako distribuční funkce, lze zkoumat dodatečně, analýzou jejího průběhu a průběhu její derivace. Apriorní předpoklad o homogenitě souboru lze proto účinně testovat, jak uvidíme.

Odhad S_G nazveme GLOBÁLNÍM parametrem měřítka.

V odst. 4.4.5 jsme viděli, že globální distribuční funkce je robustní k odlehlým datům i k periferním shlukům dat. To se promítá i do značné robustnosti odhadu S_G . Pokud potvrdí test homogenity použitelnost globální distribuční funkce s tímto parametrem měřítka, je tato funkce účinným prostředkem pro řešení obtížných úloh zpracování malých a silně rozptýlených datových souborů. Osvědčila se i pro spolehlivé odhadování pravděpodobnosti pro extrémně nízké a extrémně vysoké kvantily, jako v úlohách výběrové kontroly jakosti, v analýzách spolehlivosti apod. Lze tedy shrnout, že tam, kde má S_G spolu s g_x^p (nebo g_x^p) dobrý smysl, představuje S_G referenční, pro mnohé úlohy optimální hodnotu parametru měřítka.

5.1.3 Univerzální parametr měřítka

Úloha: Dán datový soubor \mathcal{Z} s daty Z_1, \dots, Z_N a s jediným parametrem měřítka $S(N)$. Požaduje se takový odhad $S_U(N)$ parametru $S(N)$, aby gnostická aditivní distribuční funkce $p(a)$ vyhověla Kolmogorov-Smirnovovu testu dobré shody, právě když se významnost rovná P_0 .

Řešení: Budiž $Q(N, P_0) < 1/2$ kvantil testu dobré shody. Požadovaný odhad parametru měřítka je dán vztahem

$$S_U = \arg \max_S (\max_1 (|p_x(S, Z_1) - F(Z_1)_-|, |p_x(S, Z_1) - F(Z_1)_+|) = Q(N, P_0)), \quad (5.1.3-1)$$

kde F je empirická distribuční funkce jako v def.24. Řešení existuje vždy. Je-li datový soubor \mathcal{Z} N -tici pozorování nezávislých náhodných veličin s týmž rozdělením $P(\log(z))$, je funkce $p(N, S_U, \log(z))$ asymptoticky nestranným odhadem této distribuční funkce.

Důkaz: Ze (4.4.1-1) a (4.4.1-3) je patrné, že při $S \rightarrow 0$ konverguje funkce $p_x(z)$ k schodovité funkci, shodné s empirickou distribuční funkcí, kdežto při $S \rightarrow \infty$ se stává konstantou rovnou jedné polovině, a to pro jakýkoliv neprázdný datový soubor. Je spojitou funkcí S , proto řešení rovnice (5.1.3-1) existuje pro všechna N, P_0 , pro něž $Q(N, P_0) < 1/2$. Splnění testovací podmínky je řešením rovnice zajištěno, avšak snížením P_0 při daném N se Q sníží a funkce p_x testu nevyhoví. Platí-li zmíněné statistické předpoklady, plyne z důsledku 11.3 b) asymptotická nestrannost, neboť s neomezeně rostoucím N se bude snižovat $Q(N, P_0)$ k nule, takže řešení S_U rovnice (5.1.3-1) vyhoví podmínce (4.4.2-5). ▲

Odhad S_U nazveme UNIVERZÁLNÍM parametrem měřítka.

Uvedené způsoby odhadování parametru měřítka nevyčerpávají složitou problematiku tohoto parametru. Byly uvedeny proto, že se již osvědčily v řadě aplikací: algoritmus pro S je rychlý a je

vhodný pro filtry, monitory a identifikátory, které pracují v reálném čase procesů. Pro závažná rozhodnutí podporovaná analýzou malých homogenních datových souborů se používá S_G . Pro zkoumání nehomogenních datových souborů s jediným parametrem měřítka se uplatňuje S_U , a mají-li jednotlivé podsoubory různé parametry měřítka, použije se pro každý z nich S_L .

Vzhledem k významu parametru měřítka lze v této oblasti očekávat další vývoj.

5.2 Testování homogenity datových souborů

Definice 25: Budiž \mathcal{Z}_L datový soubor dat Z_1, \dots, Z_N vytvořený z neznámého počtu ($L \geq 1$) homogenních souborů majících shodný parametr měřítka S . Buďte H_+ a H_- hypotézy:

H_+ : Datový soubor \mathcal{Z}_L je homogenní, $L=1$.

H_- : Datový soubor \mathcal{Z}_L není homogenní, $L > 1$.

Řekneme, že HYPOTÉZA $H_+(N, P_0)$ SE ZAMÍTÁ s významností P_0 , jestliže pro datový soubor \mathcal{Z}_L a $l=1, \dots, N$ platí

$$\max_1 (\max(|p_x(S, N, Z_1) - F(Z_1)_-|, |p_x(S, N, Z_1) - F(Z_1)_+|)) \leq Q(N, P_0), \quad (5.2-1)$$

(kde $Q(N, P_0)$ je kvantil Kolmogorov-Smirnovova testu dobré shody), přičemž existuje jediné řešení Z rovnice

$$\frac{d}{dz} (p_x(S, N, z)) \Big|_{z=Z} = 0. \quad (5.2-2)$$

K této definici poznamenejme, že zde jde o gnostický a nikoliv statistický test homogenity a že u reálných datových souborů nelze výsledek tohoto testu absolutizovat.

Úloha: Dán soubor \mathcal{Z} rozsahu N . Dána významnost P_0 . Požaduje se test hypotézy H_+ .

Řešení: Odhadne se S_U z (5.1.3-1). Tím je zaručeno splnění podmínky (5.2-1) pro $S=S_U$. Tento odhad parametru S dosadíme do (5.2-2) a rovnici řešíme. Pokud není Z jediným kořenem rovnice

v intervalu $(0, \infty)$, zamítá se hypotéza H_+ a přijímá H_- .

5.3 Gnostická shluková analýza

Úloha: Dán datový soubor \mathcal{Z} s hustotou $g(z)$ (5.2-2). Požaduje se odhad počtu separovatelných homogenních podsouborů (shluků dat) a odhady jejich parametrů polohy a měřítka.

Řešení: Jako první přiblížení k hodnotám parametrů měřítka se určí S_U z (5.1.3-1). Pro ten se najdou polohy maxim \hat{z}^* hustoty $g(z)$; ty se přijmou za odhady parametrů polohy shluků a jejich počet za odhad L počtu separovatelných shluků. Pro \hat{z}_l^* , $l=1, \dots, L$, se určí lokální parametry měřítka $S_L(\hat{z}_l^*)$ jednotlivých shluků. Určí se polohy \hat{z}_l , $l=1, \dots, L-1$, lokálních minim hustoty $g(z)$ a přijmou se za odhady mezí intervalů - nosičů jednotlivých shluků pro rozčlenění souboru na L samostatných souborů. Ty se dále analyzují jako homogenní soubory, nebo se podrobují další shlukové analýze.

5.4 Odhadování distribučních funkcí a hustot dat

Úloha: Dán soubor \mathcal{Z} dat Z_1, \dots, Z_N , výsledků pozorování nebo měření neurčitých jevů. Požaduje se odhad možnosti výskytu (OČEKÁVANOST) dalších jevů téhož typu, jimž by odpovídala data o hodnotě z intervalu $(0, Z)$, jakož i odhad hustoty dat v bodě Z .

Řešení: Provede se v následujících krocích:

- 1) Odhad S_G dle 5.1.2.
- 2) Odhad S_U dle 5.1.3.
- 3) Test homogenity dle 5.2.
- 4) V případě H_+ vypočítat očekávanost dosazením $S=S_G$ a $z=Z$ do (4.4.4-3) a hustotu stejným dosazením do (4.4.4-5), tj. užitím globální gnostické distribuční funkce.

- 5) V případě H_- užít aditivní gnostickou distribuční funkci:
- provést shlukovou analýzu dle 5.3,
 - pro všechna $l=1, \dots, \overset{*}{L}$ odhadnout $S_L(\overset{*}{Z}_l)$,
 - pro všechna $n=1, \dots, N$ vypočítat po dosazení $z=Z_n$ a $S(n)=S_L(\overset{*}{Z}_n)$ příspěvky jednotlivých dat p_{x_n} dle (4.4.1-1) tak, že parametr měřítka $S_L(\overset{*}{Z}_l)$ se použije pro všechna data z l -tého shluku, tj. z intervalu mezi příslušnými minimy Z hustoty dat,
 - vypočítat očekávanost dle (4.4.1-3) a hustotu dle (4.4.1-7).

5.5 Odhadování pravděpodobnostních distribucí a hustot

Úloha: Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ značí systém nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s pozorovanými hodnotami A_1, \dots, A_N a s distribuční funkcí $G(a)$ a hustotou $g(a)$. Nechť \mathcal{Z} značí datový soubor vytvořený z hodnot $Z_n = \exp(A_n)$, $n=1, \dots, N$. Požaduje se odhad hodnot $G(A)$ a $g(A)$ pro dané reálné A .

Řešení: Odhadnout $G(A)$ jako očekávanost, tj. vypočítat hodnotu distribuční funkce datového souboru \mathcal{Z} dle 5.4, tj. $p_x(\exp(A))$ při H_+ , či $p_x(\exp(A))$ při H_- . Hustotu $g(A)$ odhadnout jako příslušnou hustotu dat, tj. jako $p_x^+(A)$ při H_+ , nebo $p_x^-(A)$ při H_- .

5.6 Odhadování kvantilů distribučních funkcí

Úloha: Dán datový soubor \mathcal{Z} dat Z_1, \dots, Z_N , která a) nemají, nebo b) mají statistickou interpretaci jako v úloze 5.5. Požaduje se odhad takového kvantilu Z , případně kvantilu $A = \log(Z)$, že očekávanost (v případě a) nebo pravděpodobnost (v případě b)) pro $z > Z$ (příp. $a > A$) bude rovna zadané hodnotě $P \in (0, 1)$.

Řešení: Nechť $\tilde{G}(z)$ značí odhad hodnoty distribuční funkce porízený dle 5.4 (případ a) nebo 5.5 (případ b)). Požadovaný

kvantil Z se najde jako řešení rovnice

$$\tilde{G}(Z) = P. \quad (5.6-1)$$

Řešení existuje vždy.

Důkaz: Výsledkem 5.5, který existuje vždy, je jediná distribuční funkce $G(z)$, definovaná pro každé z daty a nalezenými parametry měřítka. Tato funkce je na celém R_+ monotónní a spojitá a roste zde od nuly k jedné. Pro každé P z intervalu $(0,1)$ má tedy rovnice (5.6-1) alespoň jedno řešení. ▲

5.7 Robustní odhadování parametrů polohy a jejich užití

V gnostické teorii je parametr polohy charakteristikou umístění datového souboru vzhledem k nosiči dat, nikoliv parametrem nějakého teoretického modelu (např. distribuční funkce určitého typu). Jako každá bodová charakteristika "reprezentuje" parametr polohy jen dílčí vlastnosti souboru. Proto jich lze definovat mnoho, ale je nutné při jejich užívání vždy mít v patrnosti, v jakém smyslu parametr polohy data charakterizuje. V dalším budeme pod parametry polohy datového souboru \mathcal{X}_L rozumět ideální hodnoty Z_{0l} , $l=1, \dots, L$, jeho jednotlivých podsouborů.

5.7.1 Robustní odhadování mediánu

Úloha: Dán datový soubor \mathcal{X} . Požaduje se odhad mediánu distri-

buční funkce datového souboru, tj. takové \tilde{Z}^* , že očekávanost (či pravděpodobnost) toho, že další data téže povahy padnou do intervalu $(0, \tilde{Z}^*]$, je stejná jako pro interval $[\tilde{Z}^*, \infty)$.

Řešení: Medián se odhadne dle 5.6 jako kvantil pro $P=1/2$.

5.7.2 Gnostické m -odhady parametrů polohy

Definice 26: Budiž \mathcal{X}_L datový soubor dle definice 19 s ideálními hodnotami $Z_{0l}, l=1, \dots, L$. Znalost počtu L homogenních podsouborů se nepředpokládá. Nechtě mají všechny podsoubory tentýž parametr měřítka S . Pro každé $M \in R^1$, $z \in R_+$ a pro $n=1, \dots, N$ budiž

$$q_n := (z_n/z)^{2/S}, \quad f_n(z) := 2/(q_n + 1/q_n), \quad (5.7.2-1)$$

$$w_M(z) := \sum_{n=1}^N f_n(z)^M (q_n - 1/q_n). \quad (5.7.2-2)$$

$$v_M(z) := \sum_{n=1}^N f_n(z)^{M-1} \quad (5.7.2-3)$$

GNOSTICKÝM m -ODHADEM PARAMETRU POLOHY datového souboru \mathcal{L}_L nazveme kladné a konečné řešení \hat{z}^* rovnice

$$w_M(\hat{z}^*) = 0, \quad (5.7.2-4)$$

jestliže

A) platí $M=1$,

B) platí $M < 1$ a \hat{z}^* je polohou ostrého minima funkce $v_M(z)$,

C) platí $M > 1$ a \hat{z}^* je polohou ostrého maxima funkce $v_M(z)$.

Budiž $C=J, I$. C -SYMETRICKÝM nazveme datový soubor, pro jehož ekvivalent určený dle (4.2-2) platí

$$h_{ZC} = 0, \quad (5.7.2-5)$$

kde h_{ZC} je irrelevance (4.2-3). C -ROZPTYLEM datového souboru nazveme jeho gnostickou charakteristiku h_C^2 .

Věta 15: Gnostický m -odhad \hat{z}^* parametru polohy dle definice 26 má následující vlastnosti:

a) Při $M=-1$ minimalizuje součet čtverců kvantifikačních vah jednotlivých dat souboru, absolutní hodnotu součtu vydatností zřidel polí jejich kvantifikačních změn informace a J -rozptyl datového souboru. Ke každému souboru existuje při $M=-1$ právě jeden m -odhad parametru polohy rovný

$$\hat{z}^* = \frac{8/S}{\sqrt{(z_k^{4/S}) / (z_k^{-4/S})}}. \quad (5.7.2-6)$$

b) Při $M=0$ minimalizuje kvantifikační váhu souboru a součet kvantifikačních přírůstků entropie jeho dat. Zajišťuje J -symetrii souboru a anuluje kvantifikační ztrátu informace jeho ekvivalentu. Ke každému souboru existuje při $M=0$ právě jeden m -odhad parametru polohy rovný

$$\hat{z}^* = \frac{4/S}{\sqrt{(z_k^{2/S}) / (z_k^{-2/S})}}. \quad (5.7.2-7)$$

c) Při $M=1$ zajišťuje I -symetrii datového souboru a anulování

estimační změny informace jeho ekvivalentu. Maximalizuje součet estimačních vratných změn informace dat souboru a geometrický průměr jejich věrností.

- d) Při $M=2$ maximalizuje estimační váhu souboru a součet poklesů entropie v estimačních fázích ideálních gnostických cyklů dat souboru.
- e) Při $M=3$ maximalizuje součet čtverců věrností dat, lokální aditivní gnostickou hustotu datového souboru, absolutní hodnotu součtu vydatností zřídla polí estimačních změn informace všech dat souboru a minimalizuje jeho I-rozptyl.

Důkaz: Při $M \neq 1$ se derivováním aditivní gnostické charakteristiky $v_M(z)$ podle z přesvědčíme, že podmínka (5.7.2-4) je nutnou podmínkou toho, že při $z = z^*$ má tato charakteristika extrém. Z (5.7.2-1) je patrné, že pro $M=-1$ a $M=0$ je to podmínka minimalizace a pro $M=2$ a $M=3$ maximalizace. Dosazením $M=1$ do (5.7.2-4) a porovnáním s (3.8-5) pro $C=I$ zjistíme, že v tomto případě je podmínka (5.7.2-4) totožná s podmínkou anulování estimační irrelevance (4.1.2-5). Funkce $f(z)$ podle (5.7.2-1) je věrnost (estimační váha) f_I (3.8-4), kvantifikační váha f_J je dle (3.8-4) rovna $1/f_I$. Vydatnost zřídla pole změn informace se dle (3.9.1-5) a (3.9.1-9) rovná $-4f_C^2$. Proto se při $M=-1$ minimalizuje a při $M=3$ maximalizuje absolutní hodnota jejich součtů, jak uvádí a) a e). Přitom je C -rozptyl souboru podle definic 26 a 16 roven $1+C^2 f_C^2$, je tedy v případě a) i b) minimalizován. Výrazy (5.7.2-6) a (5.7.2-7) jsou prepisy výrazu (5.7.2-4) pro $M=-1$ a $M=0$. Jednoznačnost řešení uváděná v a) a b) je tak zřejmá.

Změna entropie je dána dle (3.8.3-6) výrazem f_C^{-1} . Proto je součet přírůstků entropie minimalizován v případě b) a součet poklesů v případě d) maximalizován.

Formální úpravou vztahu (5.7.2-4) při $M=0$ se přesvědčíme, že v tomto případě platí i podmínka J -symetrie (5.7.2-5), jak je uvedeno v b). Již zmíněná nulovost irrelevance souboru v případě c) zajišťuje díky (4.2-15) pro tento případ I -symetrii souboru. Jak v případě b), tak i c) je tedy irrelevance ekvivalentu souboru nulová, proto je dle (3.9.1-12) v obou přípa-

dech nulová i změna informace jak pro kvantifikační, tak i pro estimační ekvivalent souboru.

Přímým výpočtem lze zjistit, že platí

$$(\bar{h}_{Ik} = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{d}{dz} (\overline{\log}(\bar{f}_{Ik})) \right) = 0. \quad (5.7.2-8)$$

Logaritmus věrnosti lze však porovnáním výrazu (3.9.1-14) s (3.9.1-15) identifikovat jako vratnou část změn informace v ideálním gnostickém cyklu. Podmínka I-symetrie je proto ekvivalentní s podmínkou maximalizace geometrického průměru věrností i aritmetického průměru estimačních vratných změn informace, jak je uvedeno v c).

Maximalizace průměrů čtverců věrnosti (bod e)) je maximalizací aditivní hustoty dat podle (4.4.1-6) i (4.4.1-7).

Na rozdíl od případů $M=-1$ a $M=0$ řešení rovnice (5.7.2-4) při $M>0$ nemusí být jednoznačné. Každé z řešení pak charakterizuje polohu některého ze separovatelných shluků.

Již v odst. 4.3.2 jsme se zmiňovali, že tam analyzované gnostické charakteristiky mají věcnou interpretaci. Věta 15 konkretizuje smysl této poznámky a ukazuje, že z nich odvozené gnostické m -odhady zajišťují extremalizaci funkcí spjatých buď s entropií, nebo s informací, přičemž tyto pojmy zde mají smysl i pro malé datové soubory a bez statistických předpokladů.

5.7.3 Robustnost gnostických m -odhadů

V tomto odstavci předpokládáme, že datový soubor má jediný pevný parametr měřítko S .

Důsledek 15.1: Budiž \hat{Z}^* gnostický m -odhad parametru polohy datového souboru \mathcal{Z} , $M>1$. Pak datový soubor \mathcal{Z}' získaný rozšířením souboru \mathcal{Z} o další data Z' rovná \hat{Z}^* má též parametr polohy \hat{Z}^* .

Důkaz: Jak je zřejmé z (5.7.2-3), k rovnici (5.7.2-4) se při rozšíření souboru přidá funkce mající nulovou hodnotu v $z=\hat{Z}^*$.

Gnostické m -odhady parametru polohy se tedy nemění přidáním "kvalitních" dat. Nás nyní zajímá vliv extrémně "nekvalitních" dat Z' , tj. dat značně odlehlých od nějakého základního shluku. Nejprve si povšimneme toho, že při $M>1$ je rovnice (5.7.2-4)

splněna tímtež \bar{z}^* nejen v netriviálních případech uvažovaných větou 15 (tj. kdy jsou řešení striktně kladná a konečná), ale i v limitních případech rozšířeného souboru \mathcal{Z}' při $Z' \rightarrow 0$ a $Z' \rightarrow \infty$, neboť díky vlastnostem věrnosti f konverguje v obou případech přidaný sčítanec v rovnici (5.7.2-4) k nule.

Důsledek 15.2: Budiž \mathcal{Z} datový soubor s daty $Z_k, k=1, \dots, K$ a \bar{z}^* jeho gnostický m -odhad parametru polohy. Pak platí

$$\min_k(Z_k) \leq \bar{z}^* \leq \max_k(Z_k). \quad (5.7.3-1)$$

Důkaz: Kdyby neplatily nerovnosti (5.7.3-1), byly by sčítance v (5.7.2-4) buď všechny kladné, nebo všechny záporné a \bar{z}^* by nebylo řešením této rovnice. ▲

Důsledek 15.3: Buďte \mathcal{Z} datový soubor s daty Z_1 až $Z_N, \beta \in \mathbb{R}^1$, a \mathcal{Z}' datový soubor s daty $Z_1, \dots, Z_N, Z_{N+1} \exp(\beta)$. Budiž \bar{z}^* gnostický m -odhad parametru polohy datového souboru \mathcal{Z} pro $M > 1$.

Pak platí, že při $|\beta| \rightarrow \infty$ konverguje alespoň jeden gnostický m -odhad \bar{z}' parametru polohy datového souboru \mathcal{Z}' k \bar{z}^* .

Důkaz: Dle předpokladu platí, že při datech Z_1 až Z_N má funkce $v_M(z)$ (5.7.2-3) v bodě $z = \bar{z}^*$ ostré maximum. Proto lze najít takové $0 < \epsilon < \bar{z}^*$, že pro všechna kladná $\epsilon < e$ platí

$$d = d(\epsilon) = \min(v_M(\bar{z}^*) - v_M(\bar{z}^* - \epsilon), v_M(\bar{z}^*) - v_M(\bar{z}^* + \epsilon)) > 0. \quad (5.7.3-2)$$

Označme přidané datum $Z' = Z_{N+1} \exp(\beta)$ a $q' = (Z'/z)^{2/S}$. Pak platí $f_{N+1}^{M-1}(z) = (2/(q'+1/q'))^{M-1} < (2/q')^{M-1} = (2(z/Z'))^{2(S)M-1}$, takže lze snadno najít takové $\beta_0 > 0$, že pro všechna $\beta > \beta_0$ a $\bar{z}^* - \epsilon \leq z \leq \bar{z}^* + \epsilon$ je

$$f_{N+1}^{M-1}(z) < (2(z/Z_{N+1}))^{2(S)M-1} \exp(-2(M-1)\beta/S) < d/2. \quad (5.7.3-3)$$

Označme $v_M^1(z)$ funkci (5.7.2-3) pro soubor \mathcal{Z}' . Pak pro každé $\beta > \beta_0$ je $v_M^1(\bar{z}^*) - v_M^1(\bar{z}^* - \epsilon) > 0$ i $v_M^1(\bar{z}^*) - v_M^1(\bar{z}^* + \epsilon) > 0$, takže funkce $v_M^1(z)$ má ostré maximum v nějakém bodě $\bar{z}' \in (\bar{z}^* - \epsilon, \bar{z}^* + \epsilon)$. Při $e \rightarrow 0$ tedy \bar{z}' konverguje k \bar{z}^* . Funkce $v_M^1(z)$ je všude hladká, proto funkce $w_M^1(z)$ rozšířeného souboru \mathcal{Z}' je první derivací funkce $v_M^1(z)$ a v bodě \bar{z}' prochází nulou. Proto je \bar{z}' gnostickým m -odhadem parametru polohy souboru \mathcal{Z}' .

Při $Z' \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow -\infty$) je díky symetrii funkcí situace obdobná. ▲

Při $M > 1$ má tedy gnostický m -odhad, interpretovaný jako funkce $\hat{Z}'(Z')$ při fixovaných S a Z_1, \dots, Z_N pozoruhodný průběh. Při $Z' = \hat{Z}'$ je parametr polohy \hat{Z}' rozšířeného souboru totožný s parametrem \hat{Z}' původního souboru a při extrémně malých hodnotách přidaného data Z' se k němu limitně blíží zdola, při extrémně velkých hodnotách shora. To svědčí o značné robustnosti těchto odhadů vzhledem k odlehlým datům. Z (5.7.3-3) je patrné, že stupeň robustnosti je závislý na volbě M a na parametru měřítka S .

Příklad funkce $\hat{Z}'(Z')$ je uveden na obr.4.

Křivka na obr.4 byla vypočtena pro konkrétní data z provozu tranzitního plynovodu (tlaky plynu na vstupu kompresorové stanice): 8.95, 9.44, 9.30, 9.86, 9.30, 9.58, 9.44, 10.14, 9.09. Parametr měřítka S_G byl odhadnut jako 0.0588, homogenita úspěšně otestována podle 5.2. Uvedený soubor dat byl doplňován o desátou hodnotu Z' , ta byla postupně měněna a pro každou byl vypočten parametr polohy $\hat{Z}'(Z')$ řešením rovnice (5.7.2-4) pro $M=3$. V prostřední části mezi body ZL a ZU roste parametr polohy prakticky lineárně s růstem přidávaného data Z' , tento interval nazveme intervalem TYPICKÝCH dat. Vně tohoto intervalu reaguje parametr polohy na zvyšování Z' opačně, mezi hodnotami Z' a souborem devíti pevných dat je rozpor. V souladu s důsledkem 15.1 hodnota Z' rovnající se parametru polohy původní devítky dat nemění tuto hodnotu, a - jako v důsledku 15.3 - extrémní hodnoty Z' rovněž neovlivňují původní parametr polohy. Vysoká robustnost odhadu k odlehlým pozorováním je patrná i z toho, jak úzký je interval možných změn parametru polohy Z_0 , interval od ZOL do ZOU, který nazveme TOLERANČNÍM intervalem parametru polohy.

5.7.4 Statistické vlastnosti gnostických M -odhadů

Možnost statistické interpretace některých gnostických odhadů parametru polohy uvedených v odst. 5.7.2 byla studována v [29] a [30]. V současné době je již zřejmé [31], že vhodnou transformací lze rovnici (5.7.2-4) pro všech pět typů gnostických odhadů parametru polohy převést na tvar, známý z teorie statistických robustních m -odhadů [24]. Lze-li zdůvodněně přijmout vhodný statistický model dat, pak platí i pro gnostické m -odhady věty o

asymptotických vlastnostech odhadů této třídy. Pro posouzení toho, nakolik se osvědčí specifické vlastnosti gnostických odhadů v neasymptotických situacích, jsou níže shrnuty výsledky simulační studie [32]. Je třeba poznamenat, že za podmínky slabých chyb dat konvergují všechny gnostické m -odhady k aritmetickému průměru dat:

Lemma 17: Uvažujme označení dle lemmatu 14. Budiž \hat{Z}^* gnostický m -odhad parametru polohy dle definice 26 pro $M \in \mathbb{R}^1$. Pak platí

$$\hat{Z}^* = \bar{Z}_k^- + o(\Delta^2). \quad (5.7.4-1)$$

Důkaz: Taylorovým rozkladem členů rovnice (5.7.2-4). ▲

5.7.5 Určování gnostických m -odhadů

Úloha: Dán datový soubor dle definice 26. Požaduje se odhad poloh maxim hustoty $\hat{p}(z)$.

Řešení: Je součástí gnostické shlukové analýzy dle 5.3 a spočívá podle věty 15.e v určení všech kladných a konečných řešení rovnice (5.7.2-4) pro $M=3$ a v ověření podmínky maximalizace.

Úloha: Dán datový soubor dle definice 26. Pro daný parametr měřítka S a danou robustnost odhadu (pro dané M) se požaduje odhad parametru (příp. parametrů) polohy.

Řešení: Iteracemi startujícími od hodnoty $\min(Z_k)$ se najde poloha maxima funkce (5.7.2-3) pro dané M . Postup se opakuje s počáteční iterací od největšího data souboru. Shodují-li se nalezené polohy, je parametr polohy jediný a výpočet končí, jinak se startují další iterace z intervalu mezi již nalezenými polohami krajních shluků dat.

5.7.6 Globální parametr polohy

Definice 27: Dán homogenní datový soubor \mathcal{Z} s daty Z_1, \dots, Z_N a parametrem měřítka S . Nechť existuje globální hustota dat $\hat{p}(z)$ (4.4.4-3) a je unimodální. GLOBÁLNÍM parametrem polohy souboru \mathcal{Z} nazveme polohu maxima této funkce.

Úloha: Dán datový soubor \mathcal{Z} s daty Z_1, \dots, Z_N . Za předpokladu, že existuje globální distribuční funkce souboru \mathcal{Z} , najít globální parametr polohy tohoto souboru.

Řešení: Otestovat homogenitu souboru \mathcal{Z} podle 5.2. V případě zamítnutí hypotézy H_+ globální parametr polohy neexistuje, jinak se určí jako poloha maxima funkce $\hat{\theta}_{gk}$ pro $S=S_G$.

Úlohu tohoto typu se zatím nepodařilo přiřadit k nějaké třídě statistických úloh, a proto nejsou známy asymptotické vlastnosti globálních odhadů parametru polohy. Již zmíněná značná robustnost globální distribuční funkce k periferním datům motivovala snahu ověřit vlastnosti těchto odhadů alespoň v numerických studiích. Výsledky ověřování na reálných datech [33] i na simulovaných datech [32] budou komentovány níže.

Podle důsledku 14.3 se při slabých chybách dat globální distribuční funkce přestává lišit od aditivní. Proto se za této podmínky globální parametr polohy sbližuje s gnostickými m -odhady parametru polohy a spolu s nimi s průměrem dat podle lemmatu 16. Pro slabě rozptýlené soubory mají proto všechny gnostické odhady parametru polohy obdobné vlastnosti jako aritmetický průměr.

5.7.7 Odhadování intervalu typických hodnot dat

Úloha: Dán datový soubor dle definice 26, parametr měřítka S a stupeň robustnosti $M > 1$. Označme Z_0 gnostický m -odhad parametru polohy datového souboru \mathcal{Z} , odhadnutý při tomtéž M .

Požaduje se odhad spodní (Z_L) a horní (Z_U) meze intervalu typických hodnot dat (viz obr.4 a závěr odst. 5.7.3).

Řešení: Výpočtem

$$R = ((M^{1/2} + 1)/(M - 1)^{1/2}) S/2, \quad (5.7.7-1)$$

$$Z_L = Z_0/R, \quad Z_U = Z_0 \times R. \quad (5.7.7-2)$$

Motivace: Buďte Z_1, \dots, Z_N pevná data souboru \mathcal{Z} . Rozšiřme soubor

\mathcal{Z} na \mathcal{Z}' přidáním data o hodnotě z . Aby byl Z_0 odhadem uvedeného typu, musí být $w_M(Z_0) = 0$ jako v (5.7.2-3). Proto je Z_0 funkcí přidaného data (z). Podle pravidla o derivování implicitní funkce je

$$\frac{d}{dz}(Z_0) = - \left(\frac{\partial w_M}{\partial z} \right) / \left(\frac{\partial w_M}{\partial Z_0} \right), \quad (5.7.7-3)$$

takže nutnou podmínkou extrému funkce $Z_0(z)$ je anulování derivace v čitateli pravé strany. Z (5.7.2-1) derivováním a úpravou plyne, že musí platit

$$f^2(z/Z_0) = (M-1)/M, \quad (5.7.7-4)$$

což je kvadratická rovnice pro $(z/Z_0)^{2/S}$, jejímž řešením jsou výrazy (5.7.7-2).

Je-li tedy již znám odhad Z_0 , lze najít obě meze intervalu typických hodnot dat přímým výpočtem. Poměr obou mezí ("relativní šíře" intervalu) závisí jen na volbě M a na parametru měřítka. Z hodnot $M > 1$ často dáváme přednost $M=3$, protože z pěti hodnot tohoto parametru teoreticky interpretovatelných větou 15 zajišťuje nejvyšší vnější robustnost a navíc dává odhady poloh, které se shodují s maximy aditivní hustoty dat, což usnadňuje analýzu dat. Pak je poměr mezí intervalu typických hodnot dat určen jen parametrem měřítka.

5.7.8 Odhady mezí tolerančního intervalu parametru polohy

Úloha: Dán datový soubor \mathcal{Z} dle definice 26, jeho parametr měřítka S , $M > 1$ a Z_0 , gnostický m -odhad parametru polohy.

Požaduje se odhad mezí Z_{0L} a Z_{0U} tolerančního intervalu parametru polohy Z_0 (viz závěr odst. 5.7.3 a obr.4).

Řešení: Vypočítat R (5.7.7-1) a Z_L , Z_U (5.7.7-2). Rozšířit soubor \mathcal{Z} na \mathcal{Z}' přidáním data Z_L . Najít gnostický m -odhad parametru polohy souboru \mathcal{Z}' nejbližší k Z_0 zleva; ten přijmout za Z_{0L} . Rozšířit datový soubor \mathcal{Z} na \mathcal{Z}'' přidáním data Z_U a určit Z_{0U} jako gnostický m -odhad parametru polohy souboru \mathcal{Z}'' nejbližší k Z_0 zprava.

K úlohám 5.7.7 a 5.7.8 je třeba dodat, že u nehomogenních datových souborů s blízkými maximy hustot dat se může stát, že se částečně překryjí intervaly typických dat, patřící k sousedním lokálním maximům. V takových případech se nepodaří určit "vnitřní" meze intervalů. Tyto případy interpretujeme jako sníženou rozlišitelnost jednotlivých shluků dat. Překrývání zmíněných intervalů různých datových souborů lze výhodně využít k řešení následující úlohy.

5.7.9 Robustní testování shody a odlišnosti malých souborů dat

Úloha: Dány dva datové soubory \mathcal{Z} a \mathcal{Z}' . Požaduje se klasifikace stupně shody těchto souborů.

Řešení: Provádí se v následujících krocích:

- 1) Gnostická shluková analýza dle 5.3.
- 2) Určení m -odhadů parametrů polohy dle 5.7.5 pro $M > 1$.
- 3) Odhadování mezí intervalu typických hodnot dat dle 5.7.7 pro všechny parametry polohy.
- 4) Odhadování mezí tolerančních intervalů všech parametrů polohy dle 5.7.8.
- 5) Vyhodnocení stupně shody jednotlivých shluků obsažených v obou souborech porovnáním intervalů vymezených čtveřicemi ZL, ZOL, ZOU, ZU s čtveřicemi ZL', ZOL', ZOU', ZU' :
 - A) Jeden z tolerančních intervalů $(ZOL, ZOU), (ZOL', ZOU')$ je podintervalem druhého.
 - B) Částečné překrytí tolerančních intervalů.
 - C) Toleranční intervaly disjunktí, částečné překrytí intervalů (ZL, ZU) a (ZL', ZU') typických dat.
 - D) Intervaly typických dat (ZL, ZU) a (ZL', ZU') disjunktí.
- 6) Odhady distribučních funkcí obou datových souborů dle 5.4, případně 5.5 a zhodnocení očekávanosti, příp. pravděpodobnosti jevů patřících do jednotlivých průniků a sjednocení intervalů určených podle předcházejícího bodu.

Ze způsobu určení hodnot ZOL a ZOU vyplývá, že stupeň shody souborů dle bodu B) lze interpretovat jako existenci takového jediného data (vzatého z průniku tolerančních intervalů), které přidáním k souborům \mathcal{Z} i \mathcal{Z}' způsobí splynutí parametrů polohy příslušného shluku dat.

5.8 Robustní odhadování kovariančních koeficientů

Úloha: Dány dva homogenní datové soubory \mathcal{Z} a \mathcal{Z}' s týmž počtem dat N a s týmž parametrem měřítka S , vytvořené z úseků dvou synchronizovaných časových řad. Zadán typ robustnosti (vnější /vnitřní) a její stupeň, tj. dáno M .

Požaduje se robustní odhad gnostického kovariančního koeficientu pro zpoždění K .

Řešení: Proveďte se po otestování homogenity obou souborů a po odhadnutí jejich parametrů polohy \underline{Z}^* a \underline{Z}' dosazením do vzorce pro $\text{cov}(N,K)$ (4.3.1-2) s irrelevantcemi jako v lemmatu 15 pro

$$Q_1 := (Z_1/\underline{Z}^*)^{2/S} \quad (1=1, \dots, N),$$

přičemž vnější robustnost se zajistí volbou $C=I$, vnitřní $C=J$. Z lemmatu 14 a vzorce (4.3.1-10) je patrné, že tento odhad při slabých chybách splyne s výběrovým odhadem druhého smíšeného momentu standardizovaných chyb dat. Z lemmatu 15 víme, že cov_I má citlivost 0 (vnější robustnost) a cov_J citlivost $2/S$ (vnitřní robustnost).

5.9 Robustní odhadování parametrů regresního modelu

5.9.1 Gnostická formulace a řešení identifikačního problému

Úloha: Dáno:

a) Diferencovatelná funkce $F: R^M \times R^M \rightarrow R^1$ známého typu,

$$F(\underline{c}, \underline{x}) = y, \quad (5.9.1-1)$$

parametrizovaná M -ticí neznámých parametrů $c_1, \dots, c_M \in R^1$ ve tvaru sloupcového vektoru \underline{c} . Sloupcový vektor \underline{x} je dán M -ticí nezávislých proměnných x_1, \dots, x_M , skalár y značí závislou proměnnou. Funkce F je tedy modelem systému, jehož vstupem je \underline{x} a výstupem y .

b) Řada N pozorovaných hodnot vstupu i výstupu, \underline{x}'_n, y'_n ($n=1$ až N).

Jak vstupní, tak i výstupní pozorování mohou být znehodnoceny chybami neznámé povahy. Není dán matematický model těchto poruch, víme jen, že k hodnotám vstupních i výstupních proměnných přispívají aditivním způsobem.

c) Gnostický parametr měřítka $S \in R_+$.

d) Požadavek zhodnotit jednotlivé chyby modelu na základě gnostické teorie, tj. pro

$$q(\underline{c}'_n, \underline{x}'_n, y'_n) = q_n = \exp(2(y'_n - F(\underline{c}'_n, \underline{x}'_n))/S) \quad (5.9.1-2)$$

přijmout za chybu hodnotu estimační irrelevance

$$h_n = (1/q_n - q_n) / (1/q_n + q_n). \quad (5.9.1-3)$$

Tato funkce hodnotí chybu aproximace pozorovaného výstupu y' číslem $y=F(\underline{c}',\underline{x}')$, určeným dosazením odhadu \underline{c}' za neznámý vektor \underline{c} , a pozorovaného vstupního vektoru \underline{x}' místo neznámého skutečného vstupního vektoru \underline{x} .

e) Požadavek, aby se celková shoda modelu s daty posuzovala dle součtu hodnot gnostické kritériální funkce

$$k: (-1,1) \rightarrow R_+, \quad (5.9.1-4)$$

hodnotící vliv jednotlivých aproximačních chyb h_n na kvalitu identifikace.

Požaduje se: Najít takový odhad \underline{c}'' , který maximalizuje ukazatel kvality

$$u(\underline{c}') := \sum_{n=1}^N k(h(q_n)), \quad (5.9.1-5)$$

tj. najít

$$\underline{c}'' = \underset{\underline{c}'}{\operatorname{argmax}}(u(\underline{c}')). \quad (5.9.1-6)$$

Poznámka k formulaci problému: Specifikou je zde použití chyby (h) , která není lineární funkcí rozdílu pozorované a modelové hodnoty výstupu, nýbrž estimační irrelevancí. Druhou zvláštností tohoto přístupu bude taková volba funkce k (5.9.1-4), aby se ukazatel kvality (5.9.1-5) stal aditivní gnostickou charakteristikou. Jako příklady mohou sloužit následující funkce:

$$k_1(h) = f := \sqrt{1 - h^2}, \quad (5.9.1-7)$$

$$k_2(h) := -(1-h)\log(1-h) - (1+h)\log(1+h), \quad (5.9.1-8)$$

$$k_3(h) := f^2/2. \quad (5.9.1-9)$$

Protože h je estimační irrelevance, je $k_1(h)$ věrnost a maximalizace ukazatele kvality je obdobou podmínky, z níž se hledá m -odhad parametru polohy v 5.7 při $M=2$, kdežto $k_3(h)$ je obdobou

případu $M=3$. Kritéria kvality mají proto interpretaci jako ve větě 15.d a 15.e.

Porovnáním (5.9.1-8) s (3.9.1-4) se přesvědčíme, že funkce $k_2(h)$ se shoduje s I_J , takže ukazatelem kvality je v tomto případě součet estimačních změn informace; ten je maximalizován, aby byly minimalizovány celkové ztráty informace ideálních gnostických cyklů určených všemi aproximačními chybami modelu. Uvidíme, že všechny tři gnostické charakteristiky vedou k robustním řešením úlohy a že se liší stupněm robustnosti.

Řešení:

Označme \underline{c}_j j-tou iteraci vektoru parametrů \underline{c} a zadejme \underline{c}_0 , např. jako nulový vektor. Pro

$$z'_{on} := \exp(F(\underline{c}_j, \underline{x}'_n)) \quad (5.9.1-10)$$

zaveďme sloupcový vektor (gradient)

$$\underline{g}_n := ((\frac{\partial F}{\partial c_1})_{\underline{c}_j, \underline{x}'_n}, \dots, (\frac{\partial F}{\partial c_M})_{\underline{c}_j, \underline{x}'_n})^T / z'_{on} \quad (5.9.1-11)$$

a pro $q'_n = q(\underline{c}_j, \underline{x}'_n, y'_n)$ označení

$$k_n^{(1)} := (\frac{\partial k}{\partial h})_{q'_n}, \quad (5.9.1-12)$$

$$k_n^{(2)} := (\frac{\partial^2 k}{\partial h^2})_{q'_n}. \quad (5.9.1-13)$$

Pak je další iterace určena vzorcem

$$\underline{c}_{j+1} = \underline{c}_j + (\sum_n^N f_n^4 k_n^{(2)} \underline{g}_n \underline{g}_n^T)^{-1} (\sum_n^N f_n^2 k_n^{(1)} \underline{g}_n) S/2, \quad (5.9.1-14)$$

kde $f_n = (1 - h(q'_n)^2)^{1/2}$ a kde hodnoty všech funkcí jsou vypočítány s užitím j-té iterace parametrického vektoru (\underline{c}_j) pro i-tý pozorovaný vstupní vektor \underline{x}'_n . Pod $(\cdot)^{-1}$ se u regulární matice rozumí její inverze, u singulární matice pseudoinverze.

Důkaz: Užitím gradientové metody, viz [34]. ▲

5.9.2 Robustnost gnostického řešení identifikačního problému

Podívejme se na výsledek (5.9.1-14) z hlediska metody nejmenších čtverců. Zaveďme vektor

$$\underline{g}'_n := (f_n^2 \sqrt{-k_n^{(2)}}) \underline{g}_n \quad (5.9.2-1)$$

a skalár

$$e'_n := k_n^{(1)} (-k_n^{(2)})^{-1/2} S/2. \quad (5.9.2-2)$$

Pak lze (5.9.1-15) přepsat ve tvaru

$$\underline{c}_{j+1} - \underline{c}_j = \left(\sum_{n=1}^N \underline{g}'_n \underline{g}'_n{}^T \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^N \underline{g}'_n e'_n \right), \quad (5.9.2-3)$$

což je řešení přeúčtené soustavy lineárních rovnic typu

$$\underline{g}'_n{}^T (\underline{c}_{j+1} - \underline{c}_j) = e'_n \quad (n=1, \dots, N) \quad (5.9.2-4)$$

metodou nejmenších čtverců, avšak oproti přímému použití této metody k výchozím datům je tu podstatný rozdíl: gradient \underline{g} vytváří nový vstupní vektor \underline{g}' (5.9.2-1) s vahou, která se podstatně mění v závislosti na vztahu i -té rovnice k vytvářenému modelu tak, že váha rychle klesá při vzdalování y'_n od $F(\underline{c}'', \underline{x}'_n)$. Tím se

identifikační proces účinně chrání proti hrubým chybám dat, zrobustňuje se. Zmíněná proměnná váha tedy působí jako filtr na straně vstupních proměnných. Obdobnou úlohu nelineárního filtru hraje vztah (5.9.2-2) pro výstupní, závislou proměnnou. Popsanou gnostickou identifikační metodu můžeme tedy přirovnat k postupu, při němž by se metodou nejmenších čtverců zpracovávala vstupní i výstupní data, zbavovaná poruch pomocí vhodných nelineárních filtrů. Uveďme analytický tvar těchto filtrů pro tři konkrétní typy gnostických kriteriálních funkcí k_1 , k_2 a k_3 (5.9.1-7)-(5.9.1-9). Výsledky jsou shrnuty v tab.2.

Při slabých chybách dají všechny tři kriteriální funkce shodné výsledky (takové, jaké by dala metoda nejmenších čtverců). Za této podmínky se "filtry" neuplatňují, váhy sčítanců matice soustavy rovnic v (5.9.1-14) konvergují k jedné a váhy sčítanců na pravých stranách rovnic k poměrným chybám $(\exp(y'_n)/z'_{on}-1)$.

Při chybách dat, převyšujících zhruba 2%, tři gnostické kriteriální funkce potlačují vliv hrubých chyb jak levých, tak pravých stran systému rovnic (5.9.2-4) tím více, čím větší je chyba. To zrobustňuje řešení vzhledem k chybám nezávislých i závislých proměnných.

Tab.2: Váhy sčítanců v rovnici (5.9.1-14).

Typ (j)	Kriteriální funkce k_j	Váhy sčítanců v rovnici (5.9.1-14)	
		$- f_n^4 k_{jn}^{(2)}$	$- f_n^2 k_{jn}^{(1)}$
1	k_1	f_n	$Sf_n h/2$
2	k_2	f_n^2	$Sf_n^2 \operatorname{arctanh}(h)/2$
3	k_3	f_n^4	$Sf_n^2 h/2$

Interpretace těchto gnostických kriteriálních funkcí je obdobou věty 15: Funkce k_1 je mírou snížení termodynamické entropie dat identifikační "filtrací", funkce k_2 hodnotí odpovídající zvýšení množství informace a k_3 zvýšení zobecněné informační entropie.

5.9.3 Statistické vlastnosti gnostického identifikačního procesu

Podmínkami, za nichž lze výše uvedený postup interpretovat statisticky a aplikovat na něj známé statistické asymptotické výsledky, stejně jako v případě m -odhadů parametru polohy, se zabývala J. Novovičová [35]. Ukázala, že lze-li vstupní i výstupní data uvažovaná gnostickou formulací regresní úlohy považovat za N -tici pozorování nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů (y_n, \underline{x}_n) a jsou-li chyby modelu (tj. $\log(q_n)$ pro q_n dle (5.

9.1-2)) nezávislé na \underline{x}_n , pak lze vzájemně jednoznačnými trans-

formacemi převést gnostické řešení regresní úlohy na typ zařaditelný do třídy statistických m-odhadů parametrů regresního modelu, jejichž asymptotické vlastnosti již byly analyzovány.

5.10 Další možnosti využití gnostické teorie

Rámcem této práce nedovoluje zabývat se podrobněji dalšími způsoby využití výsledků gnostické teorie. Za zmínku nepochybně stojí zkušenosti J.Votruby [36], [37], který po dlouhém a málo plodném ověřování různých-v literatuře doporučovaných-způsobů zrobustňování experimentální identifikace parametrů systému obyčejných diferenciálních rovnic použil jako kriteriální funkci gnostický rozptyl, a tím pronikavě zlepšil kvalitu výsledků. Takto lze rozvíjet i jiné výše uvedené výsledky a postupy. Příkladem může být využití metody dle 5.9 pro robustní filtraci a další operace na časových řadách, pro monitorování procesů. Obdobou této metody je robustní odhadování druhých statistických momentů, robustní odhadování derivací procesů, zrobustňování nelineárního systému automatického řízení [34] a jiné již ověřené postupy. O takových možnostech se zmíníme v následujícím stručném přehledu již existujícího gnostického programového vybavení.

6 VÝVOJ, OVĚŘOVÁNÍ A VYUŽÍVÁNÍ GNOSTICKÝCH PROGRAMŮ

Tato kapitola stručně shrnuje informace o již vytvořených gnostických programech a o některých výsledcích jejich ověřování.

6.1 Přehled existujících gnostických programů

Gnostické programy vytvořené autorem lze rozdělit do čtyř skupin, na analyzátory, monitory, identifikátory a regulátory.

6.1.1 Gnostické analyzátory dat

Pod analyzátory rozumíme systémy gnostických procedur určených pro hloubkovou analýzu zejména malých souborů silně rozptýlených vzácných či drahých dat. Analyzátory mají následující funkce:

Předzpracování dat: Gnostické procedury zpracovávají data odpovídající multiplikativnímu modelu (3.1-12), přičemž se předpokládá neomezený nosič R_+ . Aditivní data se proto konvertují na multiplikativní, omezené nosiče na R_+ . Výsledky se transformují zpět do původních stupnic.

Pomocné funkce: Vstupní a výstupní operace včetně grafiky, uspořádávání dat, manipulace se soubory, řízení operací.

Hlavní funkce: Odhadování parametrů měřítka S_L , S_G a S_U dle 5.1.1 až 5.1.3. Testování homogenity dle 5.2. Shluková analýza dle 5.3. Odhadování distribučních funkcí a hustot dat či pravděpodobnosti dle 5.4 a 5.5. Odhadování kvantilů dle 5.6. Robustní odhadování parametrů polohy dle 5.7.1, 5.7.5 a 5.7.6. Intervalová analýza dle 5.7.7, 5.7.8 a 5.7.9.

Interaktivní gnostický analyzátor GA1 [38] byl vyvinut pro osobní počítač SINCLAIR-Spectrum 48K, později byl převeden na PMD-85 a v současné době je jeho rozšířená verze GAPC [39] k dispozici i pro třídu počítačů kompatibilních s IBM-PC. Pro využití v dávkovém režimu byl vyvinut systém gnostických procedur GSP [40] pro střediskové počítače IBM či JSEP.

6.1.2 Gnostické monitory procesů

Gnostickými monitory nazýváme programy pro průběžné zpracování časových řad za účelem kontroly a řízení procesů. První gnostický monitor GM1 řešil úlohu robustní filtrace časové řady jako gnostický m -odhad dle 5.7.5 v aplikaci na poslední N -tici pozorovaných hodnot (manipulace s daty typu "klouzavé okno") [41]. Jeho výhodou je použitelnost i pro procesy s multimodální hustotou dat, tento monitor může signalizovat porušení unimodality a sledovat současně dva i více modů. Nevýhodou je výpočetní náročnost. Jeho obdobou byl monitor GM3, specializovaný na průběžné odhadování pravděpodobnosti jevu [42].

Podstatné zrychlení a zjednodušení algoritmu přineslo využití modifikovaného vzorce (5.9.1-15) pro monitorovací úlohu chápanou jako identifikace parametru nejjednoduššího modelu, představovaného funkcí po úsecích konstantní. Model (5.9.1-1) je pak zjed-

nodušen na $y_n = c_0$, kde c_0 je neznámý parametr modelu. Modifikací je zde exponenciální zapomínání, které umožňuje využít tohoto postupu i pro pomalé změny kvazikonstanty c_0 . Realizací byl program GM2 [43], jehož vysoká robustnost umožnila aplikovat na filtrovanou řadu optimální lineární derivační operátory [44], (užívající teorii zobecněných lineárních operátorů [45]), a doplnit tak funkce monitoru GM2 o robustní odhadování první a druhé derivace, což realizuje monitor GM4 [46]. Jak GM2, tak GM4 pracují rekurzivně, tím jsou minimalizovány nároky na výpočetní čas i paměť. Proto jsou tyto programy dobře použitelné pro práci v reálném čase procesů.

Všechny gnostické monitory jsou vybaveny pro následující funkce:

- odhadování lokálního parametru měřítka S_L dle 5.1.1;
- robustní filtrace časových řad dle 5.7.5 nebo dle 5.9;
- odhadování očekávanosti nejnovějšího data dle 5.4;
- průběžné odhadování mezi intervalu typických dat dle 5.7.1;
- registrace četnosti neočekávaných dat;
- průběžná klasifikace dat (podtypická/typická/nadtypická).

Kromě sledování úrovně procesu (a v případě GM4) jeho trendu i zrychlení) plní tedy gnostické monitory významné diagnostické funkce, kontrolují stacionaritu procesu, signalizují jeho náhlé změny apod. Tyto funkce i robustnost a adaptibilita monitorů je činí vhodnými pro praktické použití v systémech s vysokou spolehlivostí [47].

6.1.3 Gnostické identifikátory

První aplikací metody dle 5.9 na případ lineárního vícerozměrného modelu [48] byl program GI1 pro počítač SINCLAIR-Spectrum 48K. Rovnice (5.9.1-15) se v tomto programu řeší rekurzivně a je zavedeno exponenciální zapomínání; program lze použít i k průběžné identifikaci modelů vícerozměrných časových řad. Jako gnostické monitory je i tento program vybaven diagnostickými funkcemi a je použitelný v reálném čase procesů. Po doplnění tohoto programu o další funkce byla vytvořena jeho verze pro počítače třídy IBM-PC [49], značená GI2. Využitím obdoby postupu dle

5.9 byl vytvořen program GK1 [50] pro robustní odhadování prvních a druhých statistických momentů dvojic pozorování dvou synchronních procesů. Doplněním o malou databázi byl z tohoto programu vytvořen program GK2 [51].

6.1.4 Gnostický regulátor

Pro využití ve zpětnovazebních systémech automatické regulace a programového řízení se nabízí několik možných způsobů:

- a) místo akční veličiny "eukleidovského" typu, t.j. lineární funkce odchylky pozorované hodnoty regulované veličiny od žádané hodnoty použít estimační irrelevanci;
- b) měřené hodnoty robustně filtrovat gnostickým monitorem;
- c) v systémech typu PID odvozovat alespoň derivační a proporcionální složky gnostickým monitorem;
- d) řídit podle výstupu gnostického prediktoru;
- e) v systémech řízení s průběžnou identifikací objektu použít gnostický identifikátor.

Každý z těchto způsobů představuje z teoretického hlediska samostatný problém, neboť do soustavy zavádí silně nelineární prvek a tím znesnadňuje využití lineárních metod analýzy a syntézy regulačních obvodů. Zato však lze takto získat podstatné zrobustnění vzhledem k silným vnějším i vnitřním poruchám. To se plně potvrdilo programem GR1, který realizoval způsob a), jak se lze přesvědčit z výsledků uvedených v [34]. Byl simulován dvourozměrný systém Volterrových rovnic popisujících dynamickou interakci složek nestabilního přírodního systému za působení náhodných poruch, pozorovaný se značnou neurčitostí a řízený nelineárním regulátorem. Metoda dle a) podstatně zvýšila kvalitu řízení.

6.2 Ověřování gnostických metodik

Ani důkazy o asymptotickém chování odhadů, ani o rychlosti ubývání vlivu odlehlých pozorování nepostačují pro posouzení praktické použitelnosti odhadů. Proto je nevyhnutelné doplňovat teoretické analýzy jak simulačními studiemi, tak i porovnáváním výsledků získaných různými metodami na reálných datech [52].

6.2.1 Srovnání statistických a gnostických odhadů parametru polohy na reálných datech

Pro studii o aplikovatelnosti globálních gnostických odhadů parametru polohy dle 5.7.6, u nichž nejsou známy asymptotické statistické vlastnosti, byla použita data a výsledky z dobře známé práce prof. Stiglera z MIT [52]. V jeho práci bylo testováno kromě dvou "klasických" metod (aritmetický průměr a medián) devět robustních a adaptivních statistických metod odhadování parametru polohy, doporučených experty zastupujícími různé vývojové směry robustní statistické teorie. Jako nesporně reálná data byly použity výsledky slavných fyzikálních experimentů z 18. a 19. století, uspořádané do 16 souborů, z nichž každý obsahoval zhruba dvacet měření těžé fyzikální veličiny. Šlo o následující experimenty:

- 1) Shortovo určování sluneční paralaxy (r.1763, osm souborů)
- 2) Newcombova měření doby, za kterou sluneční paprsek projde danou vzdáleností (r.1882, tři soubory)
- 3) Michelsonovo měření rychlosti světla ve vzduchu (r.1879, pět souborů).

Ve studii [33] byly Stiglerem testované metody rozšířeny o zmíněnou gnostickou metodu a ke srovnání výsledků byly použity tytéž chybové funkce: Budiž E_{on} ($n=1, \dots, 16$) "správná" hodnota pro n -tý datový soubor a E_{mn} její odhad pořizovaný m -tou metodou ($m=1, \dots, 12$). Označme

$$\bar{D}_n = (1/12) \sum_{m=1}^{12} |E_{mn} - E_{on}|, \quad (6.2.1-1)$$

takže

$$e_{mn} = |E_{mn} - E_n| / \bar{D}_n \quad (6.2.1-2)$$

je relativní chyba odhadu n -té veličiny m -tou metodou, umožňující porovnávat výsledky měření různých fyzikálních veličin. Jako správný výsledek použil prof. Stigler dnešní hodnoty hledaných veličin a dospěl k závěru, že "moderní robustní odhady nemají cenu ani času spotřebovaného počítačem". Na metodickou vadu tohoto hodnocení poukázala práce [53] s tím, že citované historické výsledky byly silně vychýlené, a proto dnes známé hodnoty nelze ke srovnání použít. Hodnocení, které bylo provedeno v [54] podle rozptylu výsledků jednotlivých metod, ukázalo, že využití robustních a adaptivních metod přináší podstatný efekt. V [33] byly jako "správné" hodnoty použity průměry odhadů téže veličiny získané všemi testovanými metodami. Tento postup byl zdůvodněn testem normality souboru chyb všech odhadů všech veličin. Kvalita odhadu m -tou metodou pak byla posuzována třemi způsoby:

a) podle absolutní hodnoty průměrné chyby $|\mu_m - 1|$, kde

$$\mu_m = \frac{16}{\sum_{n=1}^{16} e_{mn}}, \quad (6.2.1-3)$$

b) podle středně kvadratické chyby

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{16}{\sum_{n=1}^{16} (e_{mn} - \mu_m)^2 / 16}}, \quad (6.2.1-4)$$

c) podle rozpětí

$$R_m = \max_n(e_{mn}) - \min_n(e_{mn}). \quad (6.2.1-5)$$

Výsledky jsou shrnuty v tab.3.

Testované statistické metody mají - pro nějaká rozdělení - asymptotické vlastnosti obvykle považované za nutné. U gnostického globálního odhadu lze očekávat pro mnohá rozdělení asymptotické vychýlení a inkonzistenci. Přesto se při uvedeném testu tento odhad jeví v příznivém světle. Jako možné vysvětlení lze nabídnout teoretickou (gnostickou, informační) optimalitu tohoto odhadu, uplatňující se zejména v neasymptotických situacích. Uvedené srovnání rovněž ukazuje, že statistické odhady se stejně dobrými asymptotickými vlastnostmi mohou dát při aplikaci na malé soubory reálných dat výsledky velmi různé kvality. Je ale ta-

ké patrné, že použití moderních robustních metod "má cenu času počítače", zvláště přihlédneme-li k pořizovací ceně zkoumaných dat a k obtížnosti zvýšení přesnosti výsledků zdokonalením měřících metod.

Tab.3: Srovnání klasických, adaptivních a robustních statistických odhadů parametru polohy s globálním gnostickým odhadem.

m	Typ odhadu	C H Y B Y O D H A D U		
		$\hat{\sigma}_m$	$ \hat{\mu}_m - \mu $	R_m
1	Gnostický globální	0.038	0.001	0.139
2	Hoggův T1	0.061	0.017	0.261
3	25% - useknutý	0.070	0.029	0.261
4	Edgeworthův	0.079	0.011	0.273
5	15% - useknutý	0.104	0.032	0.447
6	Tukeyho "Biweight"	0.131	0.043	0.631
7	Andrewsův AMT	0.147	0.025	0.660
8	Huberův P15	0.210	0.083	0.856
9	10% - useknutý	0.211	0.097	0.821
10	Aritmetický průměr	0.212	0.078	1.055
11	Medián	0.278	0.124	0.962
12	Outmean	0.610	0.086	2.603

6.2.2 Simulační srovnání robustních estimátorů polohy

Příznivé výsledky předcházejícího srovnání podnítily vzájemné srovnávání metod odhadování parametru polohy za statisticky definovaných podmínek, ve větším rozsahu a systematictější způsobem. K tomu byl vyvinut simulační a testovací program KOV SMC [32], který využívá knihovnu gnostických procedur GSP [40]. Pro zadaný rozsah souborů (testovaly se soubory 8, 16 a 32 dat) se generovala pseudonáhodná data mající distribuci $D(\cdot)$, která je lineární kombinací základní distribuce $Z(\cdot)$ a kontaminační distribuce $K(\cdot)$:

$$D(\cdot) = (1-e)Z(\cdot) + eK(\cdot) \quad (0 \leq e \leq 1). \quad (6.2.2-1)$$

Jako základní rozdělení se použilo buď normální $N(0,1)$, nebo Cauchyho rozdělení $C(0,1)$. Kontaminujícím rozdělením pro N bylo C a naopak. Testoval se i vliv nesymetrické kontaminace tak, že

základní rozdělení $N(0,1)$ se kontaminovalo rozdělením $C(B,1)$, či rovnoměrným rozdělením $U(0,B)$. Z gnostických odhadů se testoval robustní odhad mediánu dle 5.7.1, gnostický m -odhad dle 5.7.5 s $M=3$ a globální gnostický dle 5.7.6. Ze statistických odhadů byl testován aritmetický průměr (jako eficientní odhad pro normální rozdělení), medián (jako nejlepší statistický odhad pro Cauchyho rozdělení), useknutý 12.5% a useknutý 25%, který se mezi robustními odhady dobře umístil i v tab.3. Pro každou kombinaci parametrů bylo generováno vždy 60 nezávislých realizací testovacích souborů. Generovaná data odpovídají aditivnímu gnostickému modelu, proto byla před dosazením do gnostických procedur exponencializována a parametry polohy transformovány zpět. Shrňme hlavní výsledky studie [32]:

- 1) Vliv nepřesnosti odhadu parametru měřítka na gnostické odhady parametru polohy je u globálního odhadu slabý, u m -odhadu v širokém rozsahu změn měřítka zanedbatelný a u robustního mediánu prakticky nulový. Proto bylo rozhodnuto testy provádět při pevném parametru měřítka, a to i za cenu snížení kvality gnostických odhadů.
- 2) Kvalitativní výsledky srovnávání zůstávaly stejné pro tři kritéria kvality: středněkvadratickou chybu, střední absolutní chybu i rozpětí chyb.
- 3) Pro nekontaminovaná normálně rozdělená data převýšila chyba gnostického mediánu a globálního odhadu chybu eficientního odhadu (průměru) jen o několik procent.
- 4) Pro nekontaminovaná cauchyovská data převýšila chyba těchto gnostických odhadů chybu výběrového mediánu také jen o několik procent, zatímco gnostický m -odhad byl lepší než výběrový medián.
- 5) Při silných symetrických kontaminacích ($e=0.25$ až 0.75) se gnostické odhady osvědčily zhruba stejně dobře jako silně (25%) useknutý průměr a medián, které byly ze statistických odhadů na těchto datech nejlepší.
- 6) Při slabých symetrických kontaminacích symetrických dat je gnostický globální odhad a gnostický medián o něco lepší než gnostický m -odhad.

- 7) Při silných nesymetrických kontaminacích, kdy všechny testované statistické odhady s růstem vychýlení poruch monotónně zvyšují chyby, se osvědčují gnostické m -odhady a globální odhady podstatně lépe.
- 8) Za situace podle bodu 7) je vůbec nejlepším odhadem gnostický m -odhad.

Na obr.5 je znázorněna závislost logaritmu průměrné absolutní chyby srovnávaných odhadů na vychýlení B v modelu dat (6.2.2-1) pro základní distribuci $N(0,1)$ a kontaminační $C(B,1)$ při $e=0.5$, pro datové soubory tvořené osmi daty.

Podrobněji jsou jak metoda, tak výsledky srovnávání k dispozici v [32]. Ve světle těchto výsledků lze úspěch gnostického globálního odhadu ve srovnávací tabulce 3 přičítat i přítomnosti jednotlivých hrubých chyb, které nejsou vykompenzovány chybami s opačným znaménkem. U malých datových souborů tomu tak ale bývá poměrně často.

6.2.3 Simulační testy globálních distribučních funkcí

Publikace [34] podnítila řadu simulačních testů globálních gnostických distribučních funkcí a hustot [28], které doplnily numerickou studii konzistence těchto odhadů, o nichž jsme se zmiňovali v 4.4.5. Ze 7 různých unimodálních distribucí pouze v jediném případě (rovnoměrné rozdělení na $(0,1)$) nevyšel test dobré shody, avšak - jak bylo dodatečně ukázáno - jen proto, že byla opomenuta transformace dat na neomezený nosič R_+ . Z testovaných distribucí byla přitom konzistence odhadu zajištěna pouze v jednom - log-logistickém - případě.

6.3 Ověřování gnostických algoritmů na praktických aplikacích

Koncepce gnostické teorie byla zakládána zejména s vědomím potřeby řešit úlohy, u nichž je obtížné předpokládat nebo ověřovat statistický model. Proto jsou důležitou součástí vývoje gnostických metodik i praktické aplikace. Uveďme některé příklady.

6.3.1 Výběrová kontrola stacionarity a homogenity výroby

Pro robustní kontrolu kvality hromadného výrobního procesu chemického průmyslu byl s užitím gnostického analyzátoru GA-PC navržen gnostický test [55]. Jeho vlastnosti jsou ilustrovány na obr.6 a 7. Obr.6 znázorňuje empirickou distribuční funkci kvalitativních ukazatelů (z) deseti náhodně vybraných vzorků výrobků z jednodenní produkce, kdy výroba probíhala ve standardních podmínkách. Globální distribuční funkce $g_{\bar{x}}$ (4.4.4-3) vyhovuje testu homogenity 5.2, je v dobré shodě s empirickou distribuční funkcí a hustota dat (4.4.4-5) je unimodální a symetrická. Jinému dni a nestandardním podmínkám výroby odpovídá obr.7. Globální distribuční funkce zde testu homogenity nevyhovuje pro značnou neshodu s empirickou funkcí pro spodní trojici dat. Použije se aditivní gnostická distribuční funkce $p_{\bar{x}}$ (4.4.1-3), ta má i při nezměněné hodnotě parametru měřítka S_G dvoumodální hustotu (4.4.1-7), jak je patrné na obr.7. Po přechodu k parametru měřítka S_U , zajišťujícímu dobrou shodu, se oddělení nejmenších dvou dat ještě zvýrazní: soubor není homogenní, dvě data jsou odlehlá jistě a třetí je na hranici mezi hlavním shlukem a odlehlými daty. Zajímavé je porovnat čárkované křivky příslušející globálními funkcím na obr.7 s obr.6. Ukáže se, že se liší pouze horizontálním posunutím, jejich tvar je téměř shodný. Sedm dat na obr.7 nehledě na přítomnost odlehlých dat postačilo k dobrému odhadu posunuté distribuční funkce standardní produkce. To lze považovat za projev robustnosti globální distribuční funkce. Závěr testu z druhého dne je: Nehomogenita výrobků a významný pokles celkové kvality.

6.3.2 Příklad gnostické shlukové analýzy

Na obr.8 je uveden příklad shlukové analýzy naukometrických dat [55], provedené podle 5.3. Zkoumaná data představují roční počet fyzikálních publikací různých států světa, vztažený na milión obyvatel příslušného státu. Symboly států jsou uvedeny v blízkosti dat na horizontální ose, grafy zobrazují aditivní hustotu dat dle (4.4.1-7) pro různé hodnoty parametru měřítka. Pro hodnotu

S_G dle (5.1.2-1) zdůrazňuje hustota skupinu vyspělých států jako celek, po malém snížení parametru měřítka se výrazně oddělí rozvojové státy od vyspělých a skupina vysoce produktivních se štěpí na dvě podskupiny: v nižší dominují socialistické státy a neutrální kapitalistické země, ve vyšší USA se svými spojenci. Při dalším snižování parametru měřítka se objevují ještě jemnější struktury.

6.3.3 Příklad gnostické intervalové analýzy

Také tento příklad pochází z analýzy naukometrických dat [55]. Ukazuje, že klasifikace dat pomocí intervalové analýzy dle 5.7.7 a 5.7.8 může účinně doplnit shlukovou analýzu prováděnou pomocí aditivní hustoty dat. K tomu v [55] posloužila data, určená jako poměry publikačních aktivit v různých oborech fyziky. Z výsledků uvedených v [55] lze usoudit, že tato analýza je značně robustní k náhodným vlivům a mohla by být využita k racionálnímu řízení investic do různých vědních oborů.

6.3.4 Příklad užití tolerančních intervalů parametru polohy

Při zkoumání transportu draselných iontů do buněk řas *Hydrodictyon reticulatum* vznikla v Mikrobiologickém ústavu ČSAV potřeba uspořádat intenzity vlivu řady inhibitorů na základě malých a silně rozptýlených datových souborů. K tomu byly využity toleranční intervaly gnostických M -odhadů parametru polohy dle 5.7.8. Na malé části experimentálního materiálu, kde mohly být využity statistické testy založené na Studentově rozdělení, byly gnostické a statistické výsledky ve shodě. Gnostický postup však umožnil úspěšně vyhodnotit všechny experimenty a dosáhnout cíle výzkumu [56].

6.3.5 Příklad užití globálních gnostických distribučních funkcí

Výzkum dynamiky trhlin v nápravách motorových lokomotiv T478 narazil na obtížnou úlohu odhadování hodnot pravděpodobnostních distribucí z dat. Obtížnost spočívala v malém množství dat každého ze souborů (data charakterizovala závažné provozní poru-

chy), v jejich značné neurčitosti (obvyklé pro spolehlivostní údaje) a zejména v nutnosti odhadovat pravděpodobnosti pro extrémně nízké kvantily, neboť cílem výzkumu bylo především stanovit dobu iniciace trhliny a rychlost jejího šíření. V těchto podmínkách se plně osvědčila gnostická globální distribuční funkce dle 4.4.4 svou značnou robustností [57]. Pro závěrečné shrnutí výsledků rozsáhlé analýzy pak byla úspěšně použita metoda gnostické korelační analýzy [51]. Celý úkol byl řešen ve Výzkumném ústavu ČKD Praha.

6.3.6 Příklad užití gnostického monitoru

Uveďme příklad aplikace zatím nejpokročilejšího gnostického monitoru GM4 (viz 6.1.2). Tento monitor byl ve spolupráci s Přerovskými strojírnami úspěšně uveden do provozu v automatizovaném řídicím systému cementářské pece [46]. Proces slinování je silně nestacionární a pro jeho řízení je nutné odhadovat i derivace měřené teploty. Na obr.9 jsou uvedeny provozní záznamy slinovací teploty filtrované gnostickým monitorem spolu s derivačním výstupem monitoru. Pro srovnání je uveden i výstup dříve užívaného lineárního číslicového filtru. Je patrné, že gnostický filtr lépe vystihuje skutečný průběh procesu.

6.3.7 Příklady užití gnostické identifikace regresního modelu

Program GI1 [48] realizující metodu dle 5.9 byl poprvé ve větším rozsahu prakticky použit k analýze spolehlivosti jaderných energetických tlakovodních bloků v nesocialistických státech [58]. Byla zkoumána závislost provozuschopnosti bloků na jednotkovém výkonu, účinnosti a stáří, v členění dle výrobců a počtu chladičích okruhů. Výsledky potvrdily teoretické závěry o značné robustnosti metody.

Další zajímavou aplikací tohoto programu byla identifikace ekonomických modelů chemického průmyslu USA a ČSSR na základě výsledků dosažených v roce 1986 [59]. Zkoumala se závislost zisku a produktivity práce na ročním obratu, základních fondech, ročních investicích a počtu zaměstnanců pro 23 chemických koncernů USA a 38 československých podniků chemického průmyslu. Metoda se

osvědčila nejen ve své hlavní funkci, při robustním odhadování parametrů lineárního regresního modelu, ale i tím, že kvantifikuje stupeň příslušnosti každého z datových vektorů k tomu "jádro" systému dat, které je charakterizováno výsledným modelem. To v uvedeném případě dovolilo rozčlenit podniky na ty, pro které společný model dobře vyhovuje ("střední"), a na mimořádně úspěšné a mimořádně neúspěšné podniky. Výsledky identifikace i klasifikace byly uznány za ekonomicky plně interpretovatelné.

7 UPLATNĚNÍ GNOSTIKY V PRAXI

Při posuzování stupně využití a rozšíření gnostické teorie je třeba uvážit časový faktor (první teoretické publikace koncem roku 1984), i aspekt kapacitní (vytvářením teorie, programů i jejich aplikacemi se v ÚTIA-ČSAV zabýval jediný pracovník).

V letech 1983-8 se rozvíjela práce na zavádění výsledků gnostické teorie v ČSSR v několika směrech:

- pro čs. plynárenství (průběžné monitorování technologických parametrů v systému automatického řízení přepravy plynu);
- pro generální ředitelství k.p. Chemopetrol (řízení jakosti, řízení technologických procesů);
- pro k.ú.o. Datasystém Bratislava (vývoj gnostického monitoru GM1 a knihovny gnostických procedur GSP);
- pro čs. geologii (vývoj metod vyhodnocování chemometrických analýz a geologických standardů);
- pro n.p. Synthesia (vývoj knihovny gnostických procedur);
- pro o.p. ČKD Praha (spolupráce při vytváření metodiky analýzy únavových lomů, spolupráce na modernizaci řízení teplárenských kotlů);
- pro k.p. ŠKODA (analýzy spolehlivosti jaderných elektráren, vývoj diagnostických systémů pro jaderné elektrárny).

Většina těchto prací byla prováděna na základě hospodářských smluv, jejichž celkový objem je zhruba 1.2 miliónu Kčs.

Značný zájem odborné veřejnosti o práce na gnostické teorii a jejich aplikacích lze dokumentovat 160 žádostmi z ČSSR a 46 ze zahraničí o separáty a jiné informace.

Gnostické metody sehrály významnou úlohu ve dvou kandidátských

dizertacích, které již byly obhájeny, v mikrobiologii [56] a ve výzkumu materiálů [57]. Na základě gnostických metod a algoritmů bylo vypracováno 7 přijatých řešení tematických úkolů [38], [42], [43], [46], [48], [50], [54]. Gnostické programy byly předány třem ústavům ČSAV a desíti vysokým školám na jejich žádost k využití jak ve výzkumu, tak i pro výuku.

Ze zahraničních ohlasů na publikace o gnostické teorii má zatím nejaktivnější přístup práce [28], věnovaná již zmíněné teoretické a simulační verifikaci globálních gnostických distribučních funkcí. Tato práce byla provedena ve výzkumném středisku vojenského námořnictva USA. O svých záměrech věnovat se využití gnostické teorie dala zprávu dvě indická vědecká pracoviště. Intenzívně probíhají práce na praktickém využití gnostických algoritmů v Ústavu automatizace Korejské akademie věd.

ZÁVĚRY

Přijetím předpokladu o čistě aditivním nebo čistě multiplikatívním vlivu neurčitosti na data a o nezávislosti tohoto vlivu na volbě souřadnic, v nichž je popisován, lze vytvořit axiomatický základ, na němž lze jednoduchými prostředky matematické analýzy vybudovat gnostickou teorii neurčitosti jednotlivých dat. Ta dokazuje, že proces tvorby těchto dat, kvantifikační proces, lze adekvátně modelovat v geometrii Minkowského roviny, kdežto geometrie Eukleidovy roviny je vhodným modelem estimačního procesu, procesu zpracování dat. Modelem vlivu individuální neurčitosti jsou pak operátory otáčení, které je ve smyslu těchto geometrií ortogonální. Užití algebry párových čísel umožňuje sjednotit analýzu obou procesů a zjednodušit ji. Ukazuje se významná úloha složek reprezentací operátorů otáčení párovými čísly, váhy a irrelevance data. Dvojitou integrací zříděl pole vah se dospěje k funkci, která má vlastnosti změny informace, způsobené neurčitostí, a jejíž argument má vlastnosti míry, využitelné jako odhad pravděpodobnosti. Myšlenkový experiment nabízí další interpretaci váhy data jako entropie data. Irrelevance hraje roli chyby data hodnocené ve specifické - kvantifikační nebo estimační -

metrice. Ukázalo se, že rozklad každého neurčitého data určuje ideální gnostický cyklus, pro nějž existují významné zákonitosti. Estimační proces vedený podél dráhy dané eukleidovským otáčením minimalizuje zvýšení entropie i ztrátu informace způsobené neurčitostí, a je tak návodem k optimálnímu zpracování dat. Z teorie ideálního gnostického cyklu vyplývají i vzorce pro hodnocení nevratných změn informace a entropie.

Gnostická teorie neurčitosti jednotlivých dat řeší tedy uvedeným způsobem problém hodnocení množství neurčitosti, která je v nich obsažena. Problémem teorie datových souborů je způsob skládání neurčitých dat. K jeho řešení se přijme kompoziční zákon motivovaný existencí izomorfismu mezi kvantifikační strukturou neurčitých dat a strukturou jevů relativistické fyziky, pro něž je skládání dáno zákonem zachování energie a hybnosti. Takto skládané váhy a irrelevance dat vytvářejí gnostické charakteristiky datových souborů, vyznačující se přirozenou robustností. Ty lze využít k řešení řady úloh zpracování neurčitých dat. Ověřovací studie i řada pokusných aplikací dokládá výhodné vlastnosti metod založených na gnostické teorii a jejich použitelnost v praktických podmínkách.

Autor nepovažuje stav gnostické teorie, vyložený v této práci, za konečný a problematiku za uzavřenou. Za úspěch této práce by naopak považoval, kdyby byla přijata jako otevření nových cest, po nichž stojí za to jít dál.

PODĚKOVÁNÍ

Gnostická teorie vznikla v hraničním pásmu několika oborů a formuluje i řeší dané problémy zcela netradičním způsobem. Tak nezvyklý přístup pochopitelně nemohl nevyvolávat pochybnosti a rozsáhlé diskuse, ty však přispívaly k postupnému vyjasňování a zpřesňování nových myšlenek. Za dlouhodobou morální i odbornou podporu je autor zavázán zejména Dr.A.Perezovi, DrSc., RNDr. Janu Šindelářovi, CSc. a RNDr. Jiřímu Jaruškovi, CSc. Dík patří i RNDr.I.Kramosilovi, DrSc., RNDr.J.Novovičové, CSc., Ing.J.Ježkovi, CSc. a RNDr.A.Tuzarovi, CSc.

LITERATURA

- [1] Rastrigin P.A., Markov V.A.: Kibernětičeskije modeli poznanija, Zinatne, Riga (1976)
- [2] Kovanic P.: Gnostical theory of individual data, Problems of control and information theory (P.C.I.T.) 13, 4 (1984) 259-274
- [3] Kovanic P.: Gnostical theory of small samples of real data, P.C.I.T. 13, 5 (1984) 303-319
- [4] Kovanic P.: On relations between information and physics, P.C.I.T. 13, 6 (1984) 383-399
- [5] Pokorný P.: Píseň o perle - tajné knihy starověkých gnostiků, Vyšehrad, Praha (1986)
- [6] Filozofický slovník, Svoboda, Praha (1976)
- [7] Berka K.: Měření - pojmy, teorie, problémy, Academia, Praha (1972)
- [8] Yaglom I.M.: A simple non-euclidean geometry and its physical basis, Springer-Verlag New York Inc. (1979)
- [9] Rozenfel'd B.A.: Mnogomernyje prostranstva, Nauka, Moskva, (1966)
- [10] Mac Lane S., Birkhoff G.: Algebra, 2.vydanie, Alfa, Bratislava (1974)
- [11] Raševskij P.K.: Rimannova geometrija i tenzornyj analiz, GITTL, Moskva (1953)
- [12] Weinberg S.: Gravitation and cosmology: Principles and Applications of the general theory of relativity, John Wiley and Sons, Inc. New York (1971)
- [13] Šindelář J.: Soukromé sdělení
- [14] Kamke E.: Differentialgleichungen II, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1956)
- [15] Novikov S.P., Fomenko A.T.: Elementy diferencial'noj geometrii i topologii, Nauka, Moskva (1987)
- [16] Ljaško I.I., Bojarčuk A.K., Gaj Ja.G., Kalajda A.F.: Matěmatičeskij analiz, I., Višča škola, Kijev (1983)
- [17] Kočin N.E.: Vektornoje isčislenije i načala tenzornogo isčislenija, IAN-SSSR, Moskva (1951)
- [18] Perez A.: Matematická teorie informace, Aplikace matematiky

- 3, 1 (1958) 1-21 a 3, 2 (1958) 81-99
- [19] Parzen E.: On estimation of a probability density function and mode, Ann. Math. Statist. 35 (1962) 1065-1076
- [20] Devroye L., Penrod C.S.: The strong uniform convergence of multivariate variable kernel estimates, The Canadian Journal of Statistics 14, 3 (1986) 211-219
- [21] Vajda I.: Teória informácie a štatistického rozhodovania, Alfa, Bratislava (1982)
- [22] Bell D.A.: Teorie informace a její použití v technice, SNTL Praha (1966)
- [23] Votruba V., Základy speciální teorie relativity, Academia, Praha (1977)
- [24] Huber P.J.: Robust statistics, J.Wiley, New York (1981)
- [25] Jumarie G.A.: A relativistic information theory model for general systems, Int.J.Syst.Sci., 6 (1975), 865-886
- [26] Jumarie G.A.: Subjectivity, Information, Systems. Introduction to a theory of relativistic cybernetics, Gordon and Breach, New York (1985)
- [27] Kantor F.W.: Information mechanics, J.Wiley, New York (1977)
- [28] Baran R.H.: Comments on "A new theoretical and algorithmical basis for estimation, identification and control" by P. Kovanic, Automatica IFAC 24, 2 (1988) 283-287
- [29] Fabián Z.: Point estimation in case of small data sets, Transactions of the 10-th Prague Conf. on Inf.Th. and Stat. Dec.Functions, Academia, Praha (1988)
- [30] Vajda I.: Minimum-distance and gnostical estimators, P.C.I.T., 17 (1988), 253-266
- [31] Novovičová J.: M-estimators and gnostical estimators of a location parameter, připraveno k publikaci (1988)
- [32] Kovanic P.: Simulační srovnání robustnosti estimátorů polohy, Zpráva ÚTIA-ČSAV č.1491 (1987), 28 s.
- [33] Kovanic P., Novovičová J.: On robust estimators worth to be applied to real data, Zpráva ÚTIA-ČSAV č.1463 (1987), 14 s.
- [34] Kovanic P.: A new theoretical and algorithmical basis for estimation, identification and control, Automatica IFAC 22,

- 6 (1986) 657-674
- [35] Novovičová J.: M-estimators and gnostical estimators for identification of a regression model, posláno do čas. Automatica IFAC
- [36] Votruba J.: Identifikace parametrů v dynamických modelech popsaných soustavou obyčejných diferenciálních rovnic, Sborník semináře SISO, Dům techniky ČSVTS, Ostrava (1985)
- [37] Votruba J.: Program BLOKIN MINI/2, archiv programů Střediska výpočetní techniky ČSAV, Praha
- [38] Kovanic P.: Programové vybavení pro hloubkovou analýzu malých jednorozměrných datových souborů, Datasystém, Bratislava (1986), 61 s.
- [39] Kovanic P.: Program GAPC, interaktivní gnostický analyzátor pro personální počítače, neopublikováno
- [40] Kovanic P.: GSP1 - Manuál knihovny gnostických programů, ÚTIA-ČSAV (1987), 23 s., programová dokumentace 50 s.
- [41] Kovanic P.: Gnostický monitor procesů GM1 pro počítače SINCLAIR-Spectrum 48K, Datasystém, Bratislava (1985), 20 s., příl.5
- [42] Kovanic P.: Programové vybavení pro robustní odhadování pravděpodobnosti jevů z kontaminovaných dat, Datasystém, Bratislava (1986), 13 s., příl.8
- [43] Kovanic P.: Pravděpodobnostní vyhodnocování údajů v kotelně ČKD Libeň, řešení TÚ č.13/023.6, ČKD Praha (1986), 30 s. příl.5
- [44] Kovanic P.: K algoritmům přesného číslicového měření periody reaktoru, Zpráva ÚJV-ČSAV, Řež č.2639 (1971), 15 s.
- [45] Kovanic P.: Generalized linear estimate of functions of random matrix arguments, Kybernetika 10, 4 (1974) 303-316
- [46] Kovanic P.: Gnostický filtr pro řízení rotační pece, Zpráva ÚTIA-ČSAV č.1520 (1988), 26 s.
- [47] Kovanic P., Pacovský J.: Robust filtering and fault diagnosis by gnostical methods, X-th World Congress on Automatic Control I.F.A.C., Munich (1987), Trans. Vol.3, 86-90
- [48] Kovanic P.: Programové vybavení pro robustní identifikaci regresního modelu ze silně kontaminovaných dat, Datasystém,

- Bratislava (1986), 25 s., příl.7
- [49] Kovanic P.: Program GIPC pro gnostickou identifikaci parametrů lineárního regresního modelu na personálním počítači, neopublikováno
- [50] Kovanic P.: Programové vybavení pro robustní korelační analýzu, Datasystém, Bratislava (1986), 23 s., příl.8
- [51] Kovanic P.: Gnostický korelátor GK2 s přímkovou regresí a malou databází, manuál a programová dokumentace, ÚTIA-ČSAV (1987), 23 s., příl.9
- [52] Stigler S.M. and discussants: Do robust estimators work with real data?, Annals of Stat., Vol.5, 6 (1977), 1055-1098
- [53] Rocke D.M., Downs G.W., Rocke A.J.: Are robust estimators really necessary?, Technometrics 24, 2 (1982) 95-101
- [54] Kovanic P.: Robustní testování homogenity malých datových souborů, Zpráva ÚTIA-ČSAV č.1492 (1987), 28 s.
- [55] Kovanic P., Vlachý J.: Gnostical analysis of international activities in physics, Cz. Journ. of Physics, B36 (1986) 71-76
- [56] Nešpůrková L.: Transport draselných iontů a biobakterie acidobazického typu, kandidátská disertace, Mikrobiologický ústav ČSAV, Praha (1984), 117 s.
- [57] Burian P.: Příspěvek k hodnocení provozních údajů o trhlinách v nápravách motorových lokomotiv T478, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, Praha (1988), 130 s.
- [58] Kučera V. a kol.: Spolehlivost tlakovodních bloků, pracovní seminář MODRA '87, 22.-24.4.1987, Modra u Bratislavy, vyd. k.p.ŠKODA - Plzeň (1987)
- [59] Kovanic P.: Gnostická analýza ekonomiky chemického průmyslu USA a ČSSR za rok 1986, Zpráva ÚTIA-ČSAV č.1520 (1988), 22 s., příl.4

REJSTŘÍK HLAVNÍCH POJMŮ GNOSTICKÉ TEORIE

ADITIVNÍ

- data 3.1, s.9
- distribuční funkce datového souboru 4.4.1, s.90
- forma možných dat 3.1, s.9
- gnostická charakteristika 4.3.2, s.88
- hustota datového souboru 4.4.1, s.90
- model možných dat 3.1, s.9

ALTERNATIVNÍ GNOSTICKÝ CYKLUS 3.10.1, s.66

ANALYTICKÁ párová funkce 3.5, s.28

ARGUMENT párového čísla 3.4.2, s.25

CITLIVOST gnostické charakteristiky 4.3.2, s.88

C-ORTOGONALITA párových čísel 3.7.2, s.39

C-ROZPTYL datového souboru 5.7.2, s.107

C-SYMETRIE datového souboru 5.7.2, s.107

CESTA 3.7.1, s.37

- gnostická 3.7.1, s.39

ČÍSLA

- dvojitá 3.4, s.17
 - komplexní 3.4, s.17
 - párová 3.4, s.17
 - sdružená 3.4, s.17
 - transponovaná 3.4, s.17
- DATA 2.1, s.4; 3.1, s.7-8
- aditivní 3.1, s.9
 - možná 2.2, s.7
 - multiplikatívni 3.1, s.10
 - přesná 4.1.2, s.80

DATOVÁ DVOJICE 3.6, s.30

DATOVÝ SOUBOR 4.1.2, s.80

DISTRIBUČNÍ FUNKCE

- data, datové dvojice 3.9.2, s.61
- ideální hodnoty 3.9.2, s.58
- datového souboru 4.4, s.90
- pravděpodobnosti 3.9.2, s.57; 5.5, s.22

DRUH párového čísla 3.4.2, s.23

DVOJITÁ čísla 3.4, s.17

EKVIVALENT datového souboru 4.1.2, s.83

ENERGIE datové dvojice 3.8.3, s.47

ENTROPIE (změna) 3.8.3, s.47

ESTIMACE 2.1, s.5

ESTIMAČNÍ

- operátor 3.6.3, s.33

- struktura 3.6.3, s.34

- událost 3.6.3, s.34-35

FORMA možných dat

- aditivní 3.1, s.9

- multiplikační 3.1, s.10

GEOMETRIE

- Eukleidovy roviny 3.4.1, s.18

- Minkowského roviny 3.4.1, s.18

GLOBÁLNÍ

- distribuční funkce datového souboru 4.4.4, s.95

- hustota datového souboru 4.4.4, s.95

- parametr měřítka 5.1, s.100-101

- parametr polohy 5.7.6, s.112

GNOSTICKÁ

- intervalová analýza 6.3.3, s.131

- cesta 3.7.2, s.39

- charakteristika 4.3.1, s.80

- kritériální funkce 5.9.1-4, s.117

- shluková analýza 5.3, s.132

- událost 3.6, s.31

GNOSTICKÝ

- analyzátor dat 6.1.1, s.121

- cyklus 3.10.1, s.66

- identifikátor 6.1.3, s.123

- korelátor 6.1.3, s.124

- monitor procesu 6.1.2, s.122

- m-odhad parametru polohy 5.7.2, s.106,107

- operátor 3.6, s.31

- regulátor 6.1.4, s.124

- systém 2.1, s.4

GRADIENT 3.8.4, s.49

HOMOGENNÍ datový soubor 4.1.2, s.80

HUSTOTA

- datové dvojice 3.9.2, s.61

- pravděpodobnosti 3.9.2, s.60; 5.5, s.105

HYPOTÉZA o homogenitě datového souboru 5.1.3, s.103

IDEÁLNÍ

- gnostický cyklus 3.10.1, s.66

- hodnota data 2.2, s.6, s.8; 3.1, s.8

- kvantifikace 2.2, s.6; 3.1, s.9

INDEX datového souboru 4.2; s.83

INFORMACE (změna) 3.9.1, s.53

~ přeměna na entropii a naopak 3.9.1, s.52

INTERVAL typických dat 5.7.3, s.111

IRRELEVANCE

- data, datové dvojice 3.8, s.45

- datového souboru 4.1.2, s.80

JAKOBIÁN 3.5, s.28

KOMUTATIVITA S TRANSPOZICÍ 3.5, s.27

KŘIVKA 3.7.1, s.37

KVANTIFIKACE 2.1, s.4

- ideální 2.2, s.6; 3.1, s.4

- praktická 2.2, s.7; 3.1, s.9

KVANTIFIKAČNÍ

- operátor 3.6.2, s.33

- struktura 3.6.2, s.33

- událost 3.6.3, s.34

KVANTITA 2.1, s.4

- poznávaná 2.2, s.6

- rušivá 2.2, s.7

KOMPLEXNÍ čísla 3.4, s.17

KOMUTATIVITA S TRANSPOZICÍ 3.5, s.28

LOKÁLNÍ PARAMETR MĚŘÍTKA 5.1.1, s.100

LORENTZOVY TRANSFORMACE 3.4.2, s.20

METRICKÁ ROVINA 3.4.2, s.18

- MODEL DAT 3.2.2, s.12
- dvojicový 3.2.2, s.12
 - maticový 3.3, s.12
- MOŽNÁ data 2.2, s.7
- MODUL párového čísla 3.4, s.17
- MULTIPLIKATIVNÍ
- data 3.1, s.10
 - forma možných dat 3.1, s.10
- NEURČITOST 2.2, s.7; 3.1, s.8
- OBRAZ CESTY 3.7.1, s.37
- OČEKÁVANOST 3.9.2, s.59; 5.4, s.104
- ODHAD 2.1, s.5
- gnostických kovariančních koeficientů 5.8, s.115
 - hustoty pravděpodobnosti 5.5, s.105
 - kvantilů distribučních funkcí 5.6, s.105
 - mediánu 5.7.1, s.106
 - mezi intervalu typických dat 5.7.7, s.113
 - mezi tolerančního intervalu parametru polohy 5.7.8, s.114
 - parametru měřítka 5.1, s.98
 - parametru polohy 5.7, s.106
 - parametrů regresního modelu 5.9, s.115
 - pravděpodobnostní distribuce 5.5, s.105
- OKRUH PÁROVÝCH ČÍSEL TYPU C 3.4.1, s.15
- OPERÁTOR OTÁČENÍ 3.4.2, s.22
- OTÁČENÍ 3.4.2, s.21
- PARAMETR
- měřítka 3.1, s.9
 - polohy 5.7, s.106
- PARZENOVO JÁDRO 3.9.2, s.59
- PÁROVÁ ČÍSLA, 3.4, s.17
- argument 3.4.2, s.25
 - C-ortogonalita 3.7.2, s.39
 - modul 3.4, s.17
 - sdružená 3.4, s.17
 - transponovaná 3.4, s.17
- PÁROVÁ FUNKCE 3.5, s.27

PÁROVÁ PROMĚNNÁ 3.5, s.27

POMĚRNÁ C-DÉLKA cesty 3.7.3, s.41

POZNÁVANÁ kvantita 2.2, s.6

PŘESNÁ DATA 4.1.2, s.80

RELATIVISTICKÁ STRUKTURA 3.11.1, s.75

REZIDUUM

- entropie 3.10.3, s.72

- informace 3.10.3, s.72

ROBUSTNOST

- aditivních distribučních funkcí 4.4.3, s.94

- gnostické charakteristiky 4.3.2, s.89

- gnostických M-odhadů parametru polohy 5.7.3, s.109

- globální distribuční funkce 4.4.5, s.96

- gnostického řešení identifikačního problému 5.9.2, s.119

- vnější 4.3.2, s.90

- vnitřní 4.3.2, s.91

ROZPTYL

- data, datové dvojice 3.9.2, s.61

- datového souboru 5.7.2, s.107

RYCHLOST POHYBU po cestě 3.7.1, s.38

RUŠIVÁ kvantita 2.2, s.7

SDRUŽENÉ párové číslo 3.4, s.17

SKALÁRNÍ SOUČIN 3.4.2, s.19

SLOŽKA párového čísla 3.4, s.17

STRUKTURA

- dvojic neurčitostí 3.2.1, s.11

- dvojic neurčitých dat 3.2.2, s.11

- estimační 3.6.3, s.34,35

- kvantifikační 3.6.2, s.33

- matic reprezentujících data 3.3, s.13

TENZOR ENERGIE-HYBNOSTI 3.11.1, s.75

TESTOVÁNÍ HOMOGENITY datového souboru 5.2, s.103

TOLERANČNÍ INTERVAL parametru polohy 5.7.3, s.111

TRANSPONOVANÉ párové číslo 3.4, s.17

TŘÍDA $C_1(.)$ 3.5, s.28

TYPICKÁ data 5.7.3, s.111

UDÁLOST

- estimační 3.6.3, s.34
- kvantifikační 3.6.3, s.34
- gnostická 3.6.1, s.31

UNIVERZÁLNÍ PARAMETR MĚŘÍTKA 5.1.3, s.102

ÚHEL 3.4.2, s.22

ÚSEK CESTY 3.7.1, s.37

VÁHA

- data 3.8, s.45
- datového souboru 4.1.2, s.80

VEKTOR RYCHLOSTI 3.7.1, s.38

VĚRNOST data, datové dvojice 3.8, s.45

ZACHOVÁNÍ NULY 3.5, s.28

ZMĚNA

- entropie 3.8.3, s.47
- informace 3.9.1, s.53

PŘEHLED SYMBOLŮ

Jednotlivé značky:

$\langle a_1, a_2, \dots, a_N \rangle$ uspořádaná N-tice
$\{ a \mid \text{vlastnosti } a \}$... množina prvků (a)
\forall univerzální kvantor
\exists existenční kvantor
\sim kongruence (3.4.1)
$\text{Dom}(\zeta)$ definiční obor zobrazení ζ
$\text{Ran}(\zeta)$ obor hodnot zobrazení ζ
$\text{Pr}(\cdot)$ první složka dvojice či párového čísla
$\text{Se}(\cdot)$ druhá složka dvojice či párového čísla
$\text{grad}_C(q)$ gradient funkce q (3.8.4-1)
$\nabla_C^2(q)$ divergence (3.8.4-6) gradientu
\rightarrow	... přiřazení oboru hodnot definičnímu oboru
\mapsto	... přiřazení prvku definičního oboru prvku oboru hodnot
$:=$... "definuje se jako"
\mathcal{F}	... struktura
\mathcal{G}	... grupa
\dot{u}	... derivace párového čísla u podle parametru
$f _a$... hodnota funkce $f(x)$ v bodě $x=a$

Abecední seznam nelokálních symbolů s latinskými písmeny:

a	... (4.4.1-2), aditivní datum jako proměnná
A	... (3.1-9), aditivní datum
\mathcal{A}	... 3.1, množina dat
\mathcal{A}_0	... 3.1, množina ideálních hodnot dat
a_0	... 3.1, ideální hodnota data
$\text{arg}(u)$... 3.4.2, argument párového čísla u
c	... 3.4.1, neurčitá, $c \in \{j, i\}$
$C \in \{J, I\}$... 3.4.1, jednotka druhých složek párových čísel
$C' \in \{I, J\}$... (3.7.3-11), komplementární jednotka
\mathcal{L}	... obrazy gnostických cest (křivek)
\mathcal{L}_I	... (3.7.2-2), obraz estimační cesty

- \mathcal{E}_K ... (3.7.2-3), obraz kontrakční cesty
 \mathcal{E}_J ... (3.7.2-1), obraz kvantifikační cesty
 $\text{cov}_C(\cdot)$... (4.3.1-2), gnostická kovariance
 d ... (3.2.2-1), dvojice v dvojicovém modelu dat
 $\hat{d}_C(\cdot)$... (3.7.3-1), poměrná C-délka cesty
 \mathcal{D} ... (3.2.2-1), množina dvojic, nosič dvojicového modelu
 \mathcal{D}_n ... (3.2.1-4), nosič grupy dvojic neurčitostí
 \mathcal{D}_o ... (3.2.2-5), nosič grupy dvojic ideálních hodnot
 $\text{Dom}(\zeta)$... definiční obor zobrazení ζ
 e_C ... 3.8.3, (3.8.3-6), změna termodynamické entropie data
 m^e ... (3.4.2-39), jednotkové párové číslo m -tého druhu
 $\exp(c\Omega_C)$... (3.4.2-31), párový operátor otáčení
 \underline{E} ... (3.11.1-2), tenzor energie-hybnosti
 f_C ... (3.8-1), váha data
 F_C ... (4.1.2-5), váha datového souboru
 f_I ... 3.8, věrnost data
 f_{zC} ... (4.2-3), váha ekvivalentu datového souboru
 \mathcal{G}_σ ... (3.1-6), grupa neurčitostí
 \mathcal{G}_n ... (3.2.1-5), grupa dvojic neurčitostí
 \mathcal{G}_o ... (3.2.2-6), grupa dvojic ideálních hodnot dat
 \mathcal{G}_{mn} ... (3.3-13), grupa matic neurčitostí
 \mathcal{G}_{mo} ... (3.3-12), grupa matic ideálních hodnot dat
 \mathcal{G}_{un} ... (3.6.2-7), grupa kvantifikačních operátorů otáčení
 \mathcal{G}_{uo} ... (3.6.2-5), grupa kontrakcí
 $\underline{\mathcal{E}}_C$... (3.4.2-1), maticová reprezentace metrického tenzoru
 $\text{grad}_C(q)$... (3.8.4-1), gradient funkce q jako párové číslo
GA1, GAPC ... 6.1.1, gnostické analyzátoři dat
GM1 až GM4 ... 6.1.2, gnostické monitory procesů

- GI1, GI2 ... 6.1.3, gnostické identifikátory modelů
GK1, GK2 ... 6.1.3, gnostické korelátory
GR1 ... 6.1.4, gnostický regulátor
 h_C ... (3.8-2), irrelevance data
 h_{ZC} ... (4.2-3), irrelevance ekvivalentu datového souboru
 H_C ... (4.1.2-5), irrelevance datového souboru
 H_+ , H_- ... 5.2, hypotézy o homogenitě datového souboru
 h_C ... (3.9.1-7), informační funkce
 i ... 3.4.1, neurčitý parametr komplexních čísel
 I ... (3.4.1-10), imaginární jednotka komplexních čísel
 i_C ... (3.9.1-8), změna informace data
 I_{ZC} ... (4.2-4), index datového souboru
 j ... 3.4.1, neurčitý parametr dvojitého čísel
 J ... (3.4.1-10), reálná jednička, jednotka druhých složek dvojitého čísel
 \mathcal{K} ... 3.4.2, množina kontrakcí
 l_C ... (3.7.1-2), C-délka cesty gnostické události
 L ... (3.4.2-5), ortogonální transformace roviny
 \mathcal{L} ... (3.4.2-5), množina ortogonálních transformací roviny
 \underline{M} ... (3.3-2), maticová reprezentace data
 \mathcal{M} ... (3.3-3), nosič maticového modelu dat
 \mathcal{M}_n ... (3.3-11), nosič grupy matic neurčitostí
 \mathcal{M}_0 ... (3.3-10), nosič grupy matic ideálních hodnot dat
 n ... 3.1, neurčitost
 n_0 ... (3.2.1-1), neutrální prvek grupy neurčitostí
 \mathcal{N} ... 3.1, množina neurčitostí
 σ_C ... (3.4.2-18), množina párových čísel prvního druhu s jednotkovým modulem
 p_C ... (3.9.1-3), argument informační funkce
 $p_J(d)$... (3.9.2-1), distribuční funkce datové dvojice d
 \mathfrak{p} ... (4.4.1-4), aditivní distribuční funkce datového souboru pro aditivní formu dat

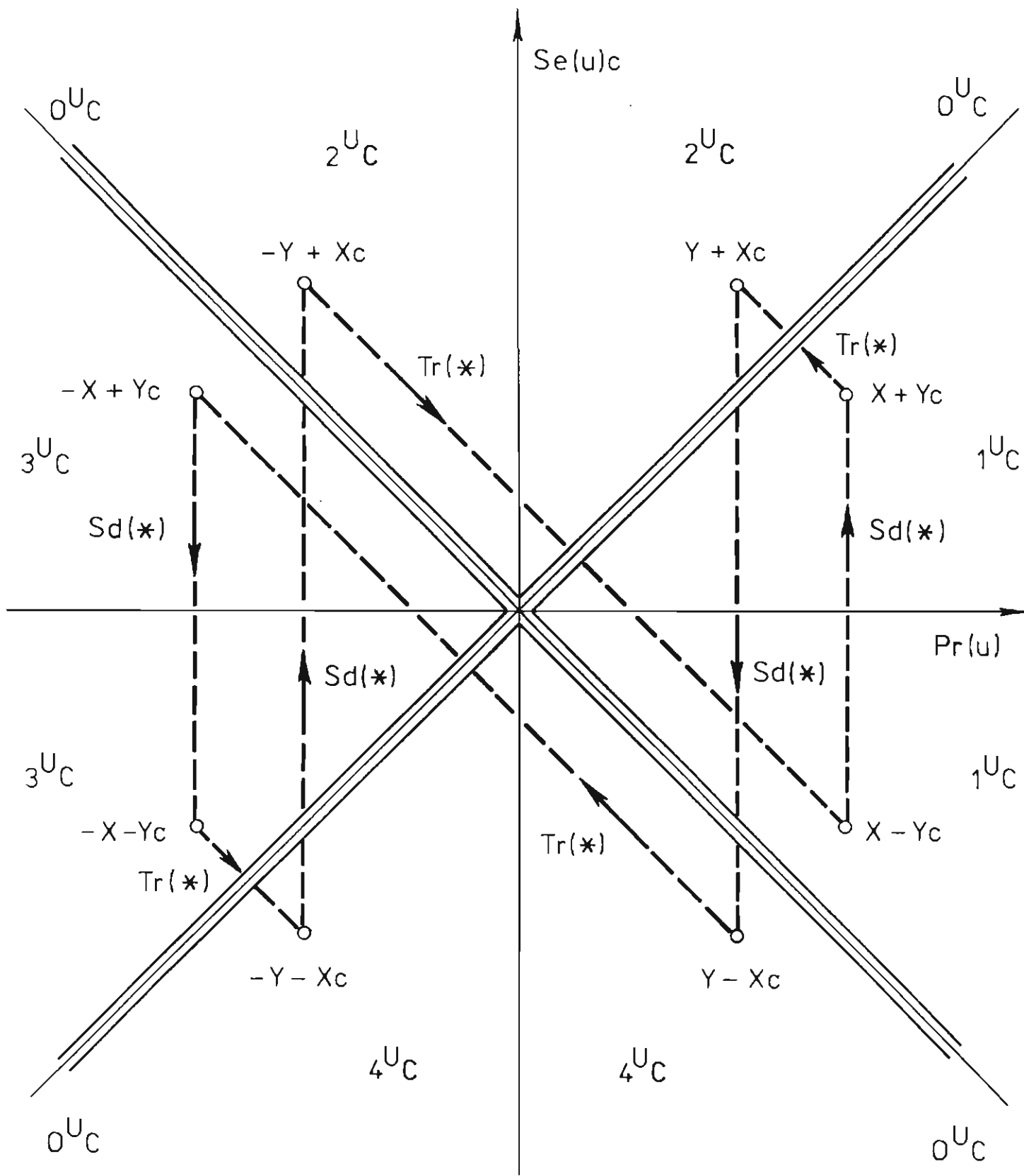
- p_x ... (4.4.1-3), aditivní distribuční funkce datového souboru pro multiplikativní formu dat
- g_x^p ... (4.4.4-3), globální distribuční funkce datového souboru
- R_+ ... 3.1, množina kladných reálných čísel
- R^m ... 3.1, kartézský součin m množin reálných čísel
- $R[c]$... 3.4.1, okruh všech polynomů v neurčité c nad tělesem reálných čísel
- r_C ... (3.4.2-61), modul párového čísla
- $Ran(\zeta)$... obor hodnot zobrazení ζ
- $Ren(u)$... (3.10.3-1), reziduum entropie
- $Rin(u)$... (3.10.3-2), reziduum informace
- \mathcal{R} ... (3.6.4), množina $R_+ \times R^1$
- S ... (3.1-7), parametr měřítka
- S_L ... 5.1.1, lokální parametr měřítka
- S_G ... (5.1.2-1), globální parametr měřítka
- S_U ... (5.1.3-1), univerzální parametr měřítka
- \mathcal{P}_d ... (3.2.2-7), struktura dvojic, dvojicový model dat
- \mathcal{P}_m ... (3.3-4), struktura matic, maticový model dat
- \mathcal{P}_J ... (3.6.2-1), struktura dvojitých čísel prvního druhu, kvantifikační model dat
- \mathcal{P}_I ... (3.6.3-4), (estimační) struktura komplexních čísel
- \mathcal{P}_r ... (3.11.1-5), relativistická struktura
- $Sd(u)$... (3.4.1-11), párové číslo sdružené s u
- $Tr(u)$... (3.4.1-12), transponované párové číslo u
- \underline{T} ... (3.3-14), transpoziční matice
- u ... (3.4.1-5), párové číslo
- u_o ... (3.4.1-8), jednotkový prvek algebry párových čísel
- \bar{u} ... (3.4.1-11), sdružené párové číslo
- u^t ... (3.4.1-12), transponované párové číslo
- $|u|_C$... (3.4.1-13), modul párového čísla
- U_C ... (3.4.1-2), podílový okruh modulo polynom 2. stupně
- ${}_m U_C$... (3.4.2-33)-(3.4.2-37), množina párových čísel m -tého druhu

- v ... 3.7.1, cesta, křivka
 v_{rC} ... (3.7.1-4), modulová složka cesty
 $v_{\omega C}$... 3.7.1, úhlová složka cesty
 C^v ... (3.7.2-1), (3.7.2-2), křivka
 \mathbb{X} ... 3.10.1, def.17, ideální gnostický cyklus
 \mathbb{O} ... 3.10.1, def.17, gnostický cyklus
 $\mathbb{O}_J, \mathbb{O}_I, \mathbb{O}_K$... 3.10.1, def.17, kvantifikační, estimační a kontrakční cesta
 \dot{v} ... (3.7.1-8), vektor rychlosti
 W ... 3.11.1, poměrná rychlost souřadnicového systému
 $w_M(.)$... (5.7.2-2), určující výraz pro gnostické m -odhady
 x ... 3.5, první složka párového čísla prvního druhu
 X ... (3.3-1), složka maticové reprezentace data
 y ... 3.5, druhá složka párového čísla prvního druhu
 Y ... (3.3-1), složka maticové reprezentace data
 z ... (4.4.1-1), multiplikativní datum jako proměnná
 Z ... (3.1-11), hodnota multiplikativního data
 Z_0 ... (3.1-13), ideální hodnota multiplikativního data
 \mathbb{Z}^* ... (5.7.2-6) a dále, gnostický odhad parametru polohy
 Z_0 ... 5.7.7, gnostický m -odhad parametru polohy pro $M > 1$
 ZL, ZU ... (5.7.7-2), dolní a horní mez intervalu typických dat
 ZOL, ZOU ... (5.7-8), dolní a horní mez tolerančního intervalu parametru polohy Z_0
 Z' ... 5.7.3 a obr.4, přidané datum libovolné hodnoty
 \mathcal{L} ... (4.1.2-2), def.19, datový soubor
 \mathcal{L}_L ... (4.1.2-2), def.19, datový soubor obsahující L podsouborů

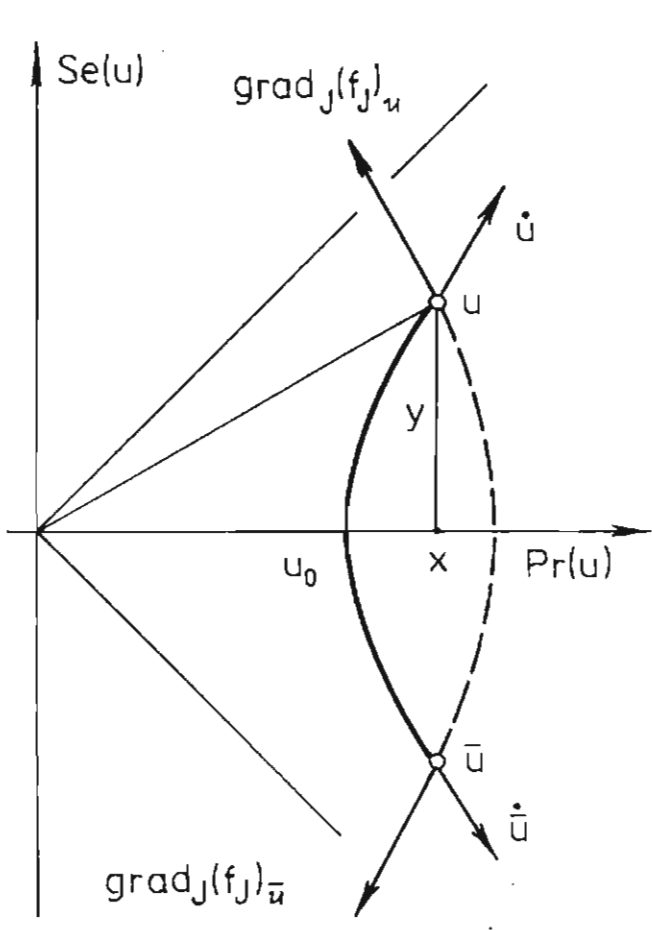
Abecední seznam nelokálních symbolů s řeckými písmeny:

- β_C ... (3.4.1-15), bijekce $R^2 \rightarrow U_C$
 γ ... (4.3.2-1), citlivost gnostické charakteristiky
 Δ ... (4.3.1-4), maximální absolutní chyba dat souboru
 ϑ ... (3.1-2), zobrazení množiny neurčitých dat
 η ... (3.4.1-16), bijekce $U_J \rightarrow U_I$
 ν ... (3.1-3), zobrazení množiny neurčitostí

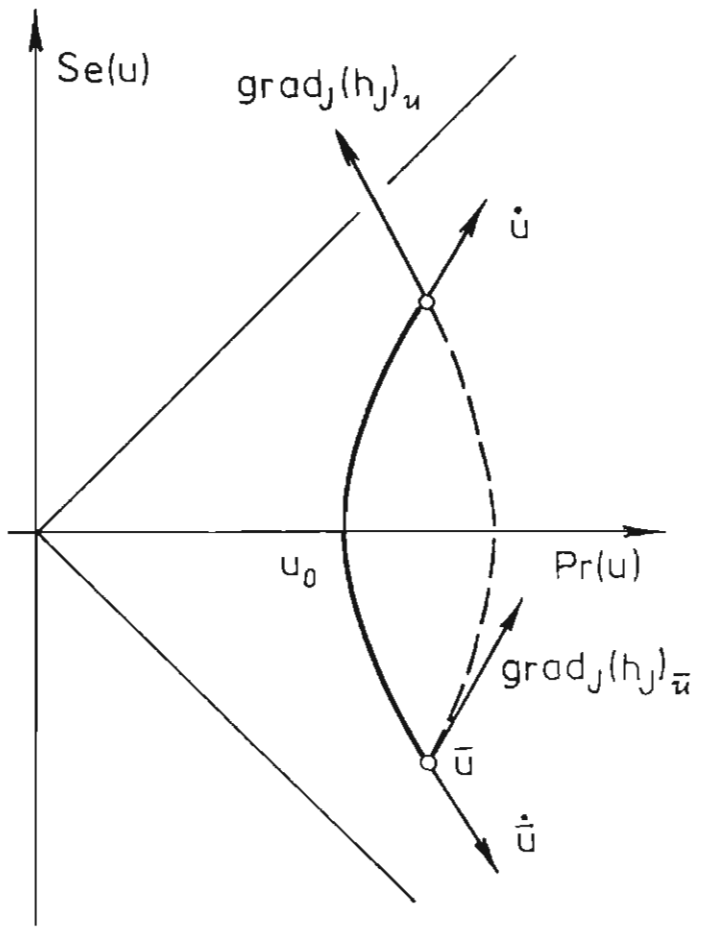
- π ... (3.1-5), zobrazení kartézského součinu množiny ideálních hodnot a množiny neurčitostí
- σ ... (3.1-4), strukturní operace na množině neurčitostí
- τ_a ... (3.2.2-3), zobrazení ideálních hodnot a neurčitostí na dvojice
- τ_m ... (3.3-5), zobrazení datových dvojic na matice
- τ_J ... (3.6.1-1), zobrazení datových dvojic na dvojité čísla prvního druhu, kvantifikační události
- τ_I ... (3.6.3-2), zobrazení datových dvojic na komplexní čísla prvního druhu, estimační události
- Φ, φ ... (3.1-9), pevná a proměnná standardizovaná chyba data, argument dvojitého čísla
- χ ... 4.3.1, gnostická charakteristika
- ν ... zobrazení množiny ideálních hodnot na R^1
- Ψ, ψ ... (3.4.2-50), pevný a proměnný argument komplexního čísla
- Ω_C, ω_C , 3.4.2, 3.4.2, pevný a proměnný argument párového čísla
- Ω_{ZC} ... (4.2-1), argument párového ekvivalentu datového souboru



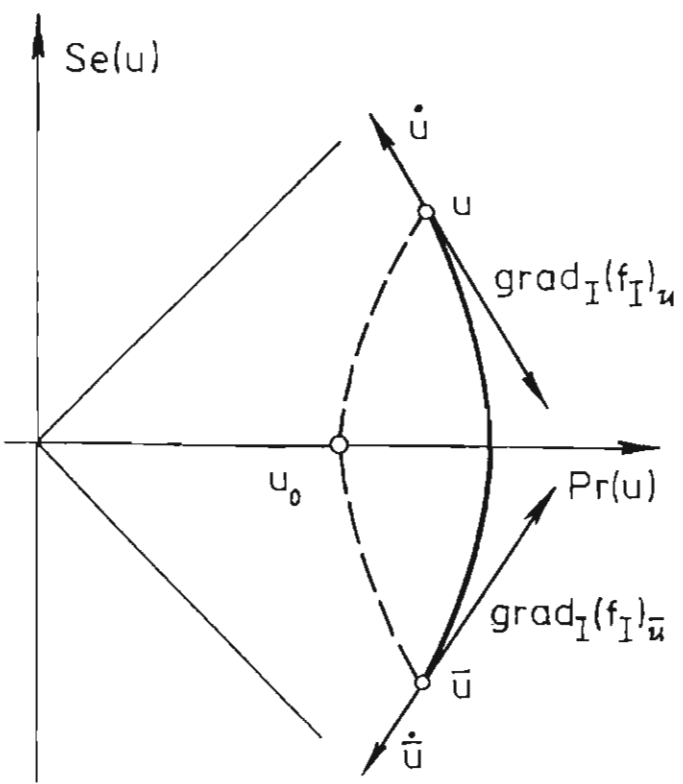
Obr. 1



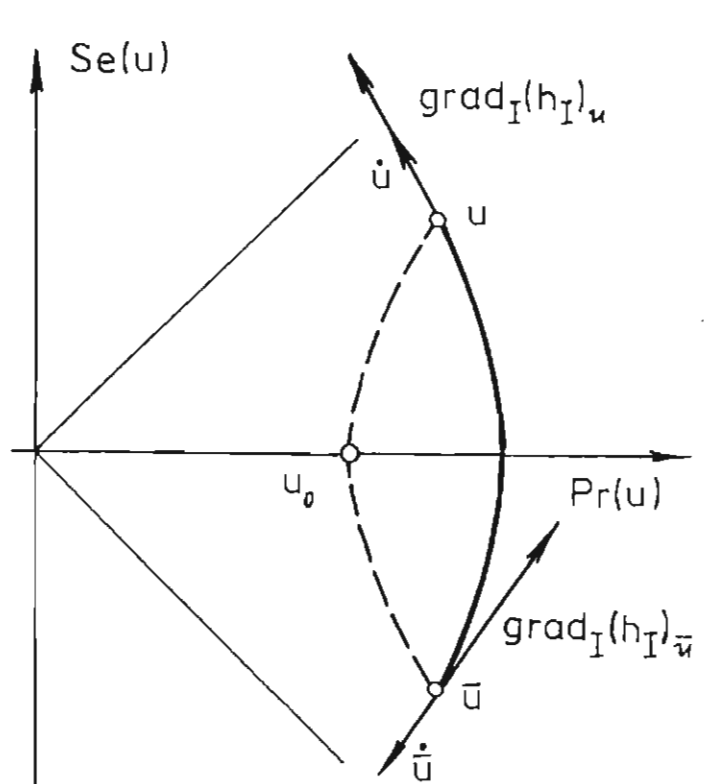
Obr. 2a



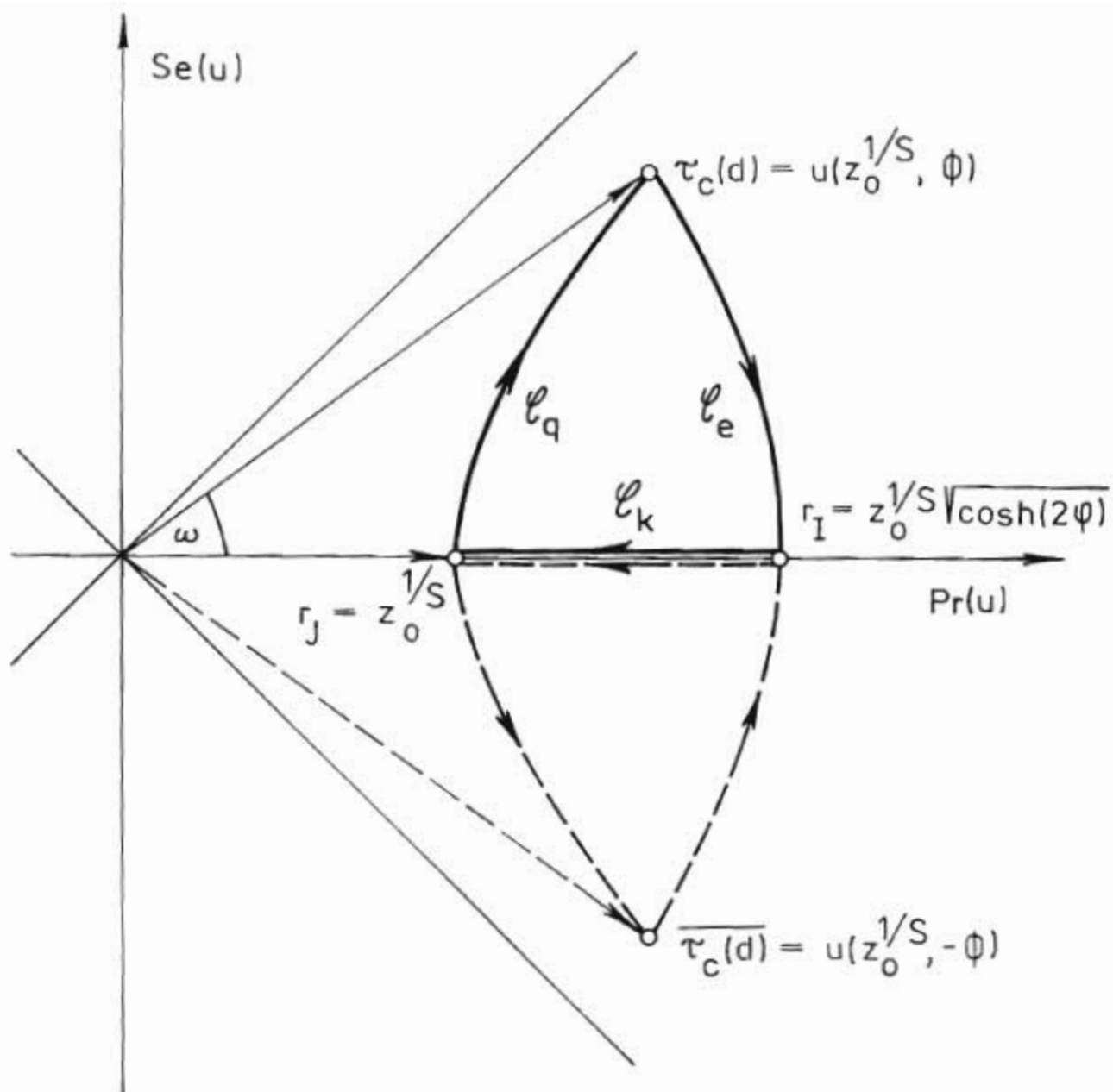
Obr. 2b



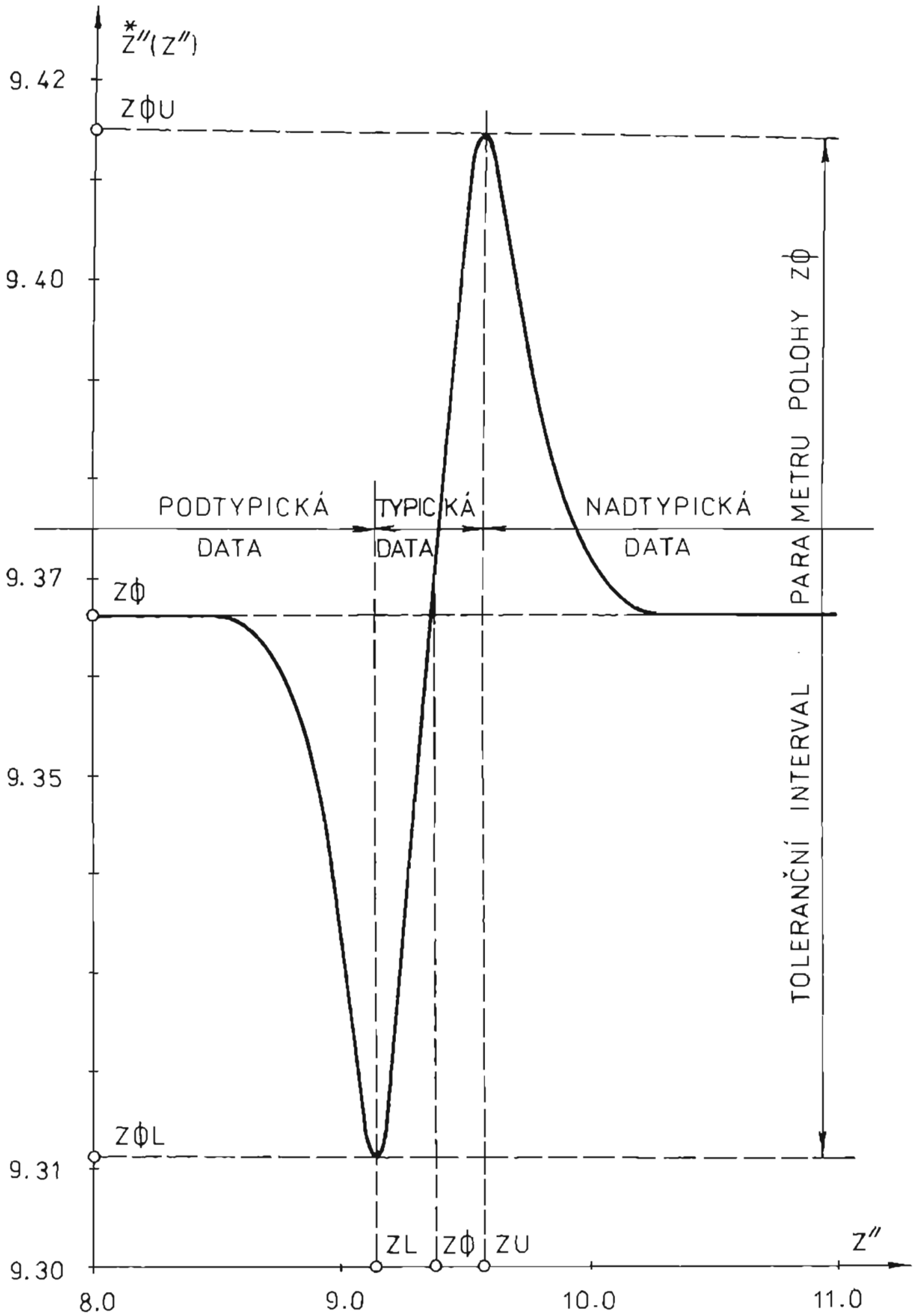
Obr. 2c



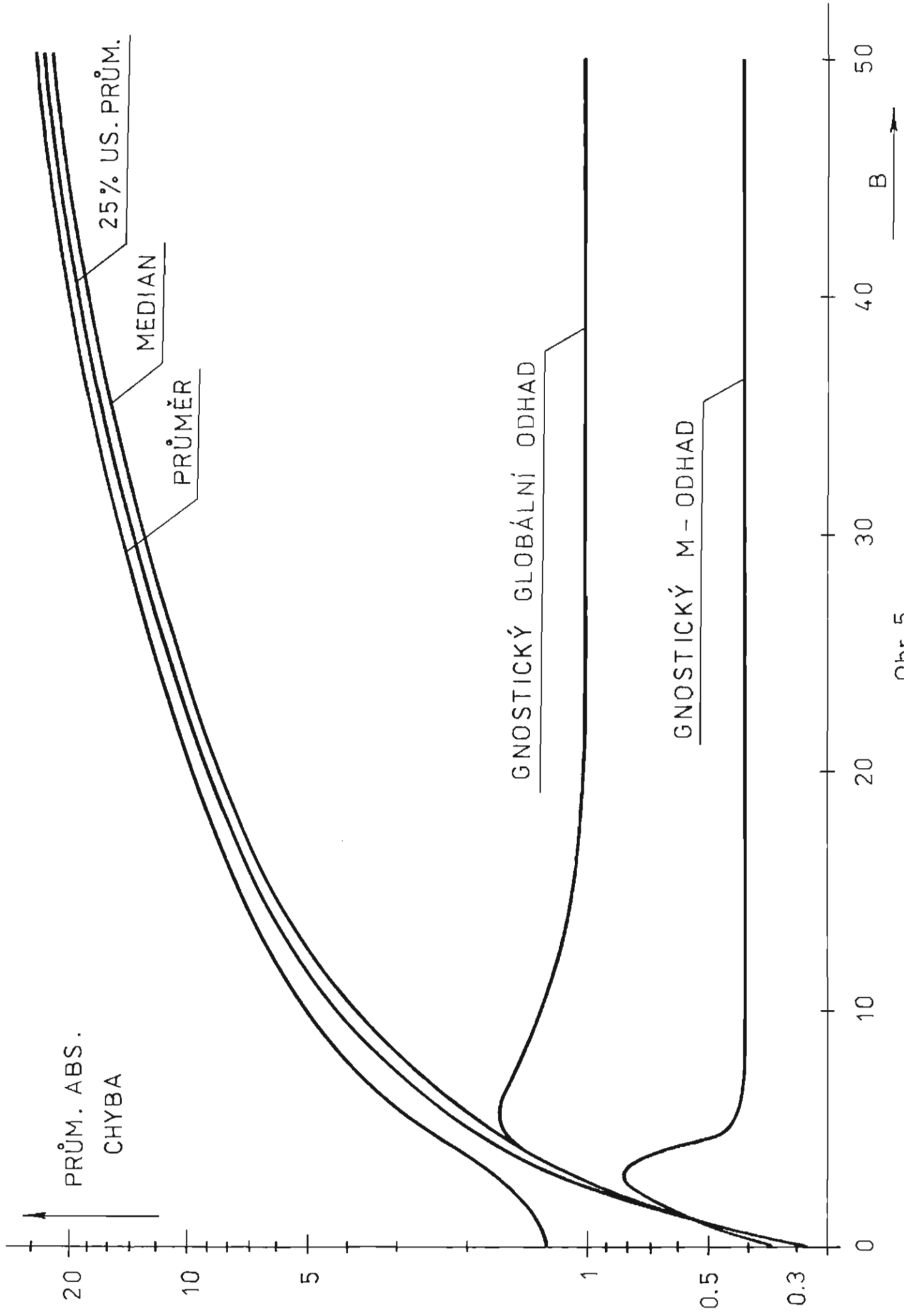
Obr. 2d



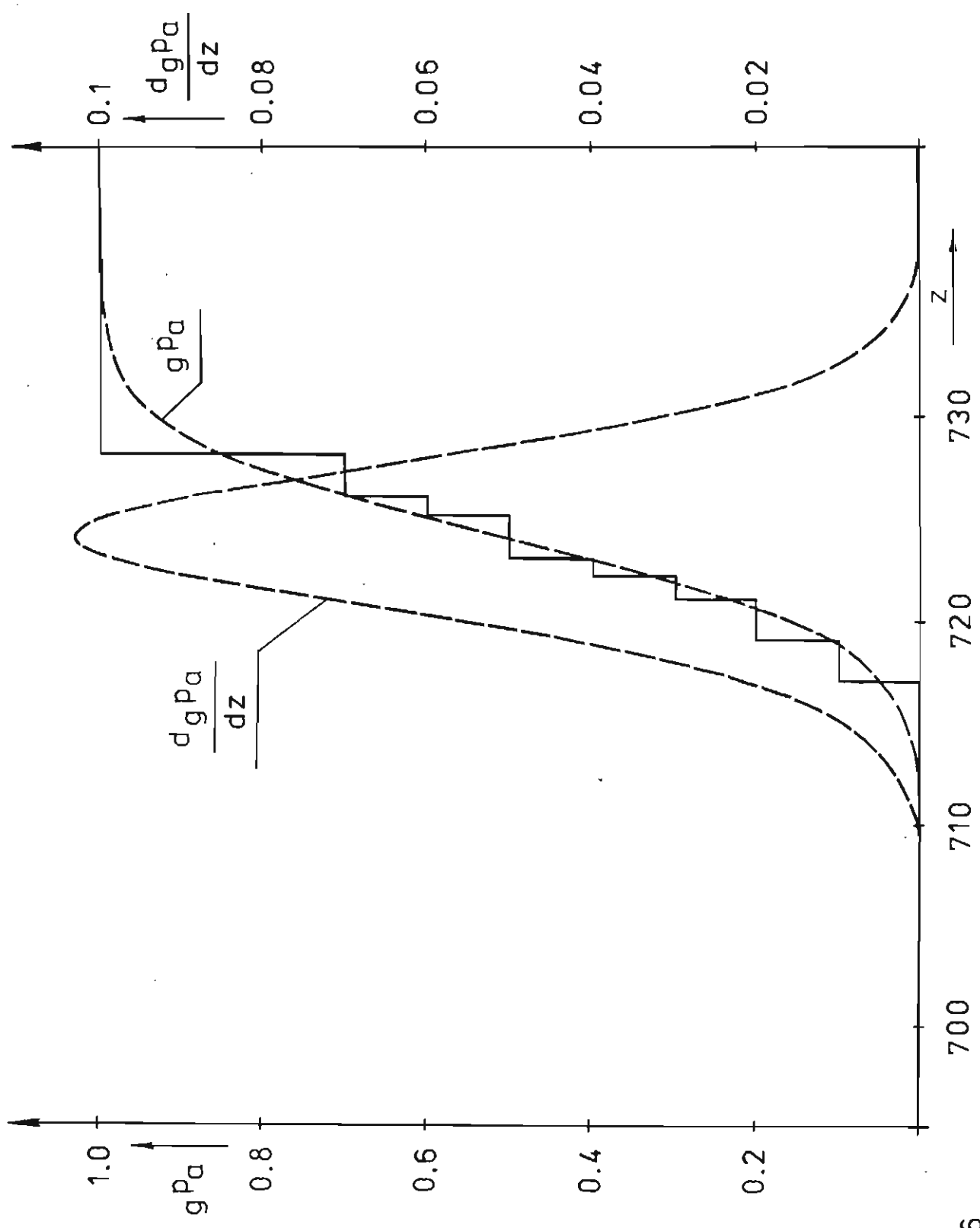
Obr. 3



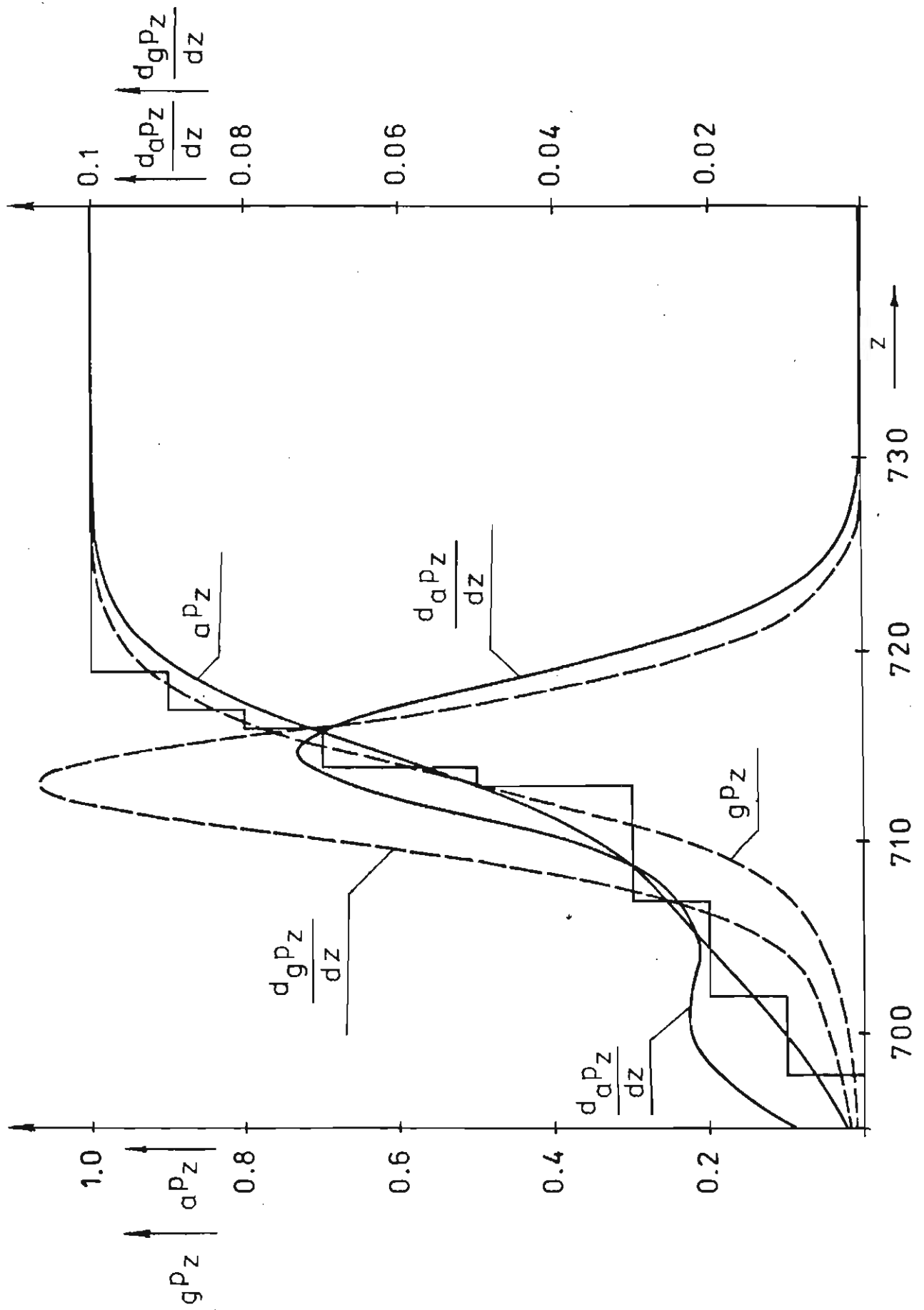
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7